1. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность — в точке F, причем H — середина AE.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если CDB вдвое меньше угла ADB.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом 10. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.

а) Докажите,что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

6. Хорды AC и BD пересекаются в точке T. На хорде BC отложен отрезок CP, равный AD. Точки P и D равноудалены от хорды AC, а отрезок TP перпендикулярен хорде BC.

а) Докажите, что площади четырехугольников $ABPD$ и $APCD$ равны.

б) Найдите эти площади, если площадь треугольника ATD равна трем.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 27$. Известно, что $AB = BC = CD = 36$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

8. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1 : 4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

9. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка F лежит на его стороне AD, причём прямые BF и CD параллельны, и прямые CF и AB параллельны.

а) Докажите, что отрезки BF и CF разбивают четырёхугольник $ABCD$ на три подобных треугольника.

б) Известно, что $AF = 1$, $DF = 4$. Найдите BC.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке E. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

а) Докажите, что $AE \cdot AC = AD \cdot AB$.

б) Найдите AE, если известно, что $BC = 7$, $CE = 4$.

11. На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B. Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.

а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.

б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T. Найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$.

12. Четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырехугольника перпендикулярно стороне BC, делит пополам сторону AD.

б) Найдите стороны четырехугольника $ABCD$, если известно, что $AC = 84$ и $BD = 77$, а диаметр окружности равен 85.

13. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $AC = 5$ и $BC = \sqrt{61}$. На его стороне BC вне треугольника (точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC) построим равносторонний треугольник BCD.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.

б) Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$.

14. В окружность вписана трапеция, основание AD которой является диаметром, а угол BAD равен 60°. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P так, что $AP : PD = 1 : 3$.

а) Докажите, что CP делит трапецию на две равновеликие части.

б) Найдите площадь треугольника BPE, если радиус окружности равен $2\sqrt{7}$.

15. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что $CD : BC = 3 : 1$.

а) Докажите, что точка E равноудалена от прямых AD и AB.

б) Найдите отношение площадей треугольников ADE и BCE.

16. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K, а окружность описанную около треугольника ABC, — в точке M.

а) Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC, если $AC = 6$, $BC = 7$, $AB = 8$.

17. Точка F лежит на меньшей дуге BC окружности, описанной около квадрата $ABCD$, причем $\angle FCB = 2 \cdot \angle FBC$. Прямая AF пересекает сторону BC в точке T, а диагональ BD — в точке O.

а) Докажите, что $TO = TC$.

б) Найдите длину стороны квадрата, если $BO = 1$.

18. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC лежит на биссектрисе угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K.

а) Докажите, что треугольники ABC и BKC подобны.

б) Найдите KC, если $DC = 4$, $AK = 6$.

19. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через вершины A и D, пересекает отрезок BM в точке L, а отрезок CN – в точке K (L и K отличны от концов отрезков BM и CN).

а) Докажите, что точки B, C, K, L лежат на одной окружности.

б) Найдите KN, если известно, что AK и BK перпендикулярны, $AB = 25$, $BC = 6$, $CD = 22$, $AD = 19$.

20. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку P и середину стороны AD, перпендикулярная стороне BC.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, если известно, что отрезки диагоналей равны: $AP = 3$, $BP = 4$, $CP = 8$.