

1. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.
- Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.
 - Найдите длину отрезка DQ , если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.
- Докажите, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.
 - Найдите BD .
3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причем H — середина AE .
- Докажите, что четырехугольник $BCFE$ — параллелограмм.
 - Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.
4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M , а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N .
- Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.
 - Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если $\angle CDB$ вдвое меньше угла ADB .
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом 10. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.
- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
 - Найдите AD .
6. Хорды AC и BD пересекаются в точке T . На хорде BC отложен отрезок CP , равный AD . Точки P и D равноудалены от хорды AC , а отрезок TP перпендикулярен хорде BC .
- Докажите, что площади четырехугольников $ABPD$ и $APCD$ равны.
 - Найдите эти площади, если площадь треугольника ATD равна трем.
7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 27$. Известно, что $AB = BC = CD = 36$.
- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
 - Найдите AD .
8. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1 : 4$, считая от точки D . Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD . На меньшей дуге AB окружности взята точка M .
- Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.
 - Найдите площадь четырехугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.
9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка F лежит на его стороне AD , причём прямые BF и CD параллельны, и прямые CF и AB параллельны.
- Докажите, что отрезки BF и CF разбивают четырехугольник $ABCD$ на три подобных треугольника.
 - Известно, что $AF = 1$, $DF = 4$. Найдите BC .
10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке E . Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.
- Докажите, что $AE \cdot AC = AD \cdot AB$.
 - Найдите AE , если известно, что $BC = 7$, $CE = 4$.

11. На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B . Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.
- Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.
 - Прямые AC и BD пересекаются в точке T . Найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$.
12. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.
- Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника перпендикулярно стороне BC , делит пополам сторону AD .
 - Найдите стороны четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AC = 84$ и $BD = 77$, а диаметр окружности равен 85.
13. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $AC = 5$ и $BC = \sqrt{61}$. На его стороне BC вне треугольника (точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC) построим равносторонний треугольник BDC .
- Докажите, что около четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
 - Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$.
14. В окружность вписана трапеция, основание AD которой является диаметром, а угол BAD равен 60° . Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P так, что $AP : PD = 1 : 3$.
- Докажите, что CP делит трапецию на две равновеликие части.
 - Найдите площадь треугольника BPE , если радиус окружности равен $2\sqrt{7}$.
15. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E , лежащей на стороне CD . Известно, что $CD : BC = 3 : 1$.
- Докажите, что точка E равноудалена от прямых AD и AB .
 - Найдите отношение площадей треугольников ADE и BCE .
16. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K , а окружность описанную около треугольника ABC , — в точке M .
- Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
 - Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC , если $AC = 6$, $BC = 7$, $AB = 8$.
17. Точка F лежит на меньшей дуге BC окружности, описанной около квадрата $ABCD$, причем $\angle FCB = 2 \cdot \angle FBC$. Прямая AF пересекает сторону BC в точке T , а диагональ BD — в точке O .
- Докажите, что $TO = TC$.
 - Найдите длину стороны квадрата, если $BO = 1$.
18. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC лежит на биссектрисе угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K .
- Докажите, что треугольники ABC и BKC подобны.
 - Найдите KC , если $DC = 4$, $AK = 6$.
19. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через вершины A и D , пересекает отрезок BM в точке L , а отрезок CN — в точке K (L и K отличны от концов отрезков BM и CN).
- Докажите, что точки B , C , K , L лежат на одной окружности.
 - Найдите KN , если известно, что AK и BK перпендикулярны, $AB = 25$, $BC = 6$, $CD = 22$, $AD = 19$.

20. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P .

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку P и середину стороны AD , перпендикулярна стороне BC .

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, если известно, что отрезки диагоналей равны: $AP = 3$, $BP = 4$, $CP = 8$.