

1. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Из вершины  $A$  опущены перпендикуляры  $AF$ ,  $AH$ ,  $AP$  и  $AQ$  на прямые  $DE$ ,  $BE$ ,  $CD$  и  $BC$  соответственно.
  - а) Докажите, что  $\angle FAH = \angle PAQ$ .
  - б) Найдите  $AH$ , если  $AF = a$ ,  $AP = b$  и  $AQ = c$ .
2. Точки  $E$  и  $K$  — соответственно середины сторон  $CD$  и  $AD$  квадрата  $ABCD$ . Прямая  $BE$  пересекается с прямой  $CK$  в точке  $O$ .
  - а) Докажите, что вокруг четырёхугольника  $ABOK$  можно описать окружность.
  - б) Найдите  $AO$ , если сторона квадрата равна 1.
3. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = AC = 10$ ,  $BC = 12$ . На стороне  $AB$  отметили точки  $M_1$  и  $M_2$  так, что  $AM_1 < AM_2$ . Через точки  $M_1$  и  $M_2$  провели прямые, перпендикулярные стороне  $AB$  и отсекающие от треугольника  $ABC$  пятиугольник, в который можно вписать окружность.
  - а) Докажите, что  $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$ .
  - б) Найдите площадь данного пятиугольника.
4. Окружность, проходящая через вершину  $B$  треугольника  $ABC$ , касается стороны  $AC$  в точке  $D$ , такой, что  $BD$  — биссектриса угла  $B$ , и пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно.
  - а) Докажите, что  $AE : CF = AB : BC$ .
  - б) Найдите отношение площадей треугольников  $AED$  и  $DFC$ , если известно, что  $AE : CF = 2 : 3$ .
5. Внутри окружности с центром  $O$  построен правильный шестиугольник  $KOFPDL$  так, что его вершина  $D$  лежит на окружности. Из точки  $B$ , диаметрально противоположной точке  $D$ , проведены две хорды  $AB$  и  $BC$ , проходящие через вершины  $K$  и  $F$  шестиугольника соответственно.
  - а) Докажите, что  $AK : KB = 3 : 7$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если радиус окружности равен 14.
6. В прямоугольный треугольник  $ABC$  вписан квадрат  $KCMN$  так, что вершины  $K$  и  $M$  расположены на катетах  $AC$  и  $BC$  соответственно, а на гипотенузе  $AB$  — вершина  $N$ . Вершины квадрата  $TPQR$  расположены на сторонах треугольника  $ABC$ , причём вершины  $P$  и  $Q$  находятся на катетах  $AC$  и  $BC$  соответственно, а вершины  $R$  и  $T$  — на гипотенузе  $AB$ .
  - а) Докажите, что точка  $C$  и центры квадратов  $KCMN$  и  $TPQR$  лежат на одной прямой.
  - б) Найдите длину стороны квадрата  $TPQR$ , если  $AC = 5$  и  $BC = 12$ .
7. Пятиугольник  $ABCDE$  — вписанный, точка  $M$  — пересечение диагоналей  $BE$  и  $AD$ . Известно, что  $BCDM$  — параллелограмм.
  - а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.
  - б) Найдите  $AB$ , если известно, что  $BE = 12$ ,  $BC = 5$ ,  $AD = 9$ .
8. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Диагонали  $AD$  и  $BE$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $BCDM$  — параллелограмм.
  - а) Докажите, что  $BC = DE$ .
  - б) Найдите длину стороны  $AB$ , если известно, что  $DE = 4$ ,  $AD = 7$ ,  $BE = 8$  и  $AB > BC$ .
9. Точка  $O$  — центр правильного шестиугольника  $ABCDEF$ . Через точку  $B$  и середину отрезка  $OD$  проведена прямая, пересекающая сторону  $ED$  в точке  $T$ .
  - а) Докажите, что прямая  $BT$  делит площадь шестиугольника в отношении 5 : 13.
  - б) Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники  $BET$  и  $BCT$  с прямой  $BT$ , если сторона шестиугольника  $ABCDEF$  равна  $\sqrt{13} - 1$ .
10. В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$  через вершину  $A$  проведена прямая, которая пересекает отрезок  $CF$  в точке  $K$  и делит площадь шестиугольника  $ABCDEF$  в отношении 1 : 11.
  - а) Докажите, что прямая  $AK$  делит диагональ  $FC$  в отношении 1 : 5.
  - б) Прямая  $AK$  пересекает описанную около шестиугольника  $ABCDEF$  окружность в точке  $T$ . Найдите отношение, в котором прямая  $BT$  делит отрезок  $AC$ .