1. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB.

б) Найдите площадь треугольника ACB.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

3. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

4. Окружность радиуса $\frac{120}{17}$ с центром на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC, равных соответственно 10 и 24.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите высоту, опущенную из вершины прямого угла треугольника ABC.

5. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 75^\circ$.

6. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1.

б) Известно, что $AB = AC = 10$ и $BC = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

7. Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC.

8. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

9. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

10. Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3 : 5$.

11. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 20,\ AC = 12$ и $BC = 16$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая описана около треугольника AMN.

12. Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 30$, $BC = 40$ и $AB = 50$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L, M — середина BC, AP — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что P — середина отрезка LM.

б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K, а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

13. Окружность, касающаяся сторон AB и BC треугольника ABC, пересекает сторону AC в точках M и P, причем $AM = MP = PC.$

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, если $AC = 21$, а центр окружности лежит на высоте к стороне BC.

14. В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает описанную окружность этого треугольника в точке F. Точка E — центр окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон AB и BC (вневписанной окружности). Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC.

а) Докажите, что отрезки AF и OF равны.

б) Найдите длину отрезка CF, если $OE = 14$.

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 5$, а $BN = 14$.

16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 45°$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1

б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 150°,\ BC = 5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

18. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1. Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1C_1 = 6$.

19. Точка O_1 — центр вписанной окружности равнобедренного треугольника ABC, а точка O_2 — центр вневписанной окружности, касающейся основания BC.

а) Докажите, что расстояние от середины отрезка O_1O_2 до точки C вдвое меньше O_1O_2.

б) Известно, что радиус первой окружности в пять раз меньше радиуса второй. В каком отношении точка касания первой окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

20. В окружности с центром O проведена хорда AB, на которой выбрана точка M. Вторая окружность, описанная около треугольника MAO, повторно пересекает первую окружность в точке K.

а) Докажите, что $BM = MK$.

б) Найдите площадь треугольника OMK, если $OM = 11$ и $BK = 12$.

21. Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

22. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. Проведена высота CH. На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны.

б) Найдите BN, если $AM = 9$, $MC = 3$, $BC = 8$.

23. Окружность с центром O, построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D. Касательная, проведенная к этой окружности в точке D, пересекает катет BC в точке M.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P, прямая OM пересекает прямую BP в точке K. Найдите $BK : KP$, если $\cos\angle BAC = \frac{4}{5}$.

24. Прямая, проходящая через середину M стороны BC треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, причём $\angle CMK = \angle BAC$.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle BKM$.

б) Найдите медиану MN треугольника CKM, если $BC = 20$, $AB = \sqrt{87}$, $CK = 8$.

25. Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN, если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

26. Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

а) Докажите, что O_1 и O_2 лежат на отрезке EF.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой O_1O_2, если $AC = 15$ и $BC = 20$.

27. Окружность с центром O_1 радиусом 9 вписана в треугольник ABC. Ее внешним образом касаются окружность с центром O_2 радиусом $\frac{81}{25}$, вписанная в угол A, и окружность с центром O_3 радиусом 1, вписанная в угол C.

а) Докажите, что $\angle C = \pi - \operatorname{arctg}\frac{24}{7}$.

б) Найдите площадь треугольника AO_1O_3.

28. В окружности с центром O отрезок EK — диаметр. Хорды ET и KS проведены так, что точки T и S лежат по одну сторону от прямой EK. Точка пересечения прямых KT и ES находится от точек T и S на расстоянии 5, $\angle TKE = 60^\circ$.

а) Докажите, что точка пересечения прямых KT и ES находится вне окружности.

б) Найдите радиус окружности.

29. Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD.

а) Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на отрезке EF.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой O_1O_2, если $AC = 15$ и $BC = 20$.

30. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O, которая касается стороны AB в точке K. Окружность в точке O_1 касается стороны AB в точке L, а также продолжений сторон AC и BC.

а) Докажите, что около четырёхугольника $AOBO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $AOBO_1$ и $KOLO_1$, если известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $BC = 10$.

31. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, точки O_1, O_2, O_3 центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно.

а) Докажите, что точка O является точкой пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

б) Найдите угол A треугольника ABC, если отрезок OO_1 короче отрезка O_2O_3 ровно в два раза.

32. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K.

а) Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

б) Найдите длину отрезка AK, если периметр треугольника ABC равен 20, а сторона BC равна 5.

33. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В треугольники ADC и ADB вписаны окружности с длинами радиусов 3 и 8 соответственно, касающиеся отрезка AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что треугольник, образованный точкой D и центрами данных окружностей прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами данных окружностей, если $ND = 4$.

34. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая BO вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APC, если известно, что радиус его описанной окружности равен 8, а $\angle ABC = 60^\circ$.

35. Внутри треугольника ABC, в котором $\angle B = 45^\circ$, выбрана точка Q такая, что $S_{ABQ} : S_{ACQ} : S_{CBQ} = 1 : 2 : 4$. Прямые CQ и AQ пересекают стороны AB и BC соответственно в точках K и L. Известно, что точки A, K, L и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите квадрат расстояния от точки Q до центра вписанной в треугольник ABC окружности, если площадь треугольника ABC равна 7.

36. Из точки A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках K и L, причем точка L лежит между A и K, а треугольник AMK — остроугольный. Расстояние от центра окружности до хорды KM равно половине радиуса окружности.

а) Докажите, что угол AMK равен 60°.

б) Найдите площадь треугольника AMK, если $AL : LK = 4 : 3$ и радиус окружности равен $2\sqrt{21}.$

37. Точка O — центр описанной окружности около остроугольного треугольника ABC. На луче AO за точкой O выбрана точка P так, что $\angle BAC + \angle APC = 90^\circ.$

а) Докажите, что $\angle OBC = \angle OPC.$

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OPC, если $BC = 24$, $\cos\angle BAC = \dfrac{3}{5}.$

38. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Пусть r и r_1 — радиусы этих окружностей, а h — высота треугольника ABC, проведенная из вершины B к стороне AC.

а) Докажите, что $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{2}{h}.$

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника AIC равна 10, а площадь треугольника AJC равна 15.

39. Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), касается боковой стороны AB в точке P, а основания BC — в точке M. Вторая окружность (вневписанная), касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q.

а) Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PMQ, совпадает с вершиной B.

б) Найдите стороны треугольника ABC, если известно, что $PQ = 12$, а расстояние между центрами первой и второй окружностей равно 15.

40. Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K, а гипотенузу AB — в точке M.

а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.

б) Найдите площадь четырехугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.

41. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На стороне AB взята точка K так, что отрезки KL и BC параллельны. Окружность, описанная около треугольника AKC, пересекает прямую BC повторно в точке M.

а) Докажите, что $AK = BM$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AKMC$, если площадь треугольника ABC равна 121 и $AB : BC = 4 : 7$.