

1. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1 .
- Постройте сечение призмы плоскостью BAN .
 - Найдите периметр этого сечения.
2. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB' . Через точки K и C' проведена плоскость α , параллельная прямой BD' .
- Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
 - Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .
3. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении $8 : 3$, считая от вершины B_1 .
- Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и K .
 - Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .
4. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от вершины D_1 .
- Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и M .
 - Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M .
5. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.
- Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.
 - Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.
6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4.
- Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1 , и докажите, что это равнобокая трапеция.
 - Найдите площадь этого сечения.
7. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от вершины D_1 .
- Докажите, что сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M , является равнобедренной трапецией.
 - Найдите площадь этой трапеции.
8. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении $8 : 3$, считая от вершины B_1 .
- Докажите, что сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K , есть равнобедренная трапеция.
 - Найдите площадь этого сечения.
9. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{6}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.
- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
 - Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

10. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
- Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4, AA_1 = 6$.

11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что прямые CA_1 и $C_1 D_1$ перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1 .

12. Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC . Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M .

- Докажите, что $MD : MD_1 = 2 : 1$.
- Найдите площадь сечения, если $AB = 4, AA_1 = 6$.

13. Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$. Известно, что $AB = BC$. Точка K — середина ребра $A_1 B_1$, а точка M лежит на ребре AC и делит его в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

- Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC .
- Найдите расстояние между прямыми KM и $A_1 C_1$, если $AB = 10, AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

14. Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q — точка пересечения диагоналей грани $ABB_1 A_1$, точки M, N и K — середины BC, CC_1 и $A_1 C_1$ соответственно.

- Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.
- Найдите площадь сечения QMN .

15. В правильной восьмиугольной призме $ABCDEFGH A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ сторона основания AB равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно 6. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Плоскость α параллельна прямой $H_1 E_1$ и проходит через точки M и A .

- Докажите, что сечение данной призмы плоскостью α — равнобедренная трапеция.
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F_1 , а основанием — сечение данной призмы плоскостью α .

16. Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре BB_1 отмечена точка Q такая, что $BQ : QB_1 = 2 : 7$. Плоскость α проходит через точки A и Q параллельно прямой BD . Эта плоскость пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что $C_1 M : CC_1 = 5 : 9$.
- Найдите площадь сечения, если $AB = 3\sqrt{2}, AA_1 = 18$.

17. В правильной четырехугольной призме $MNPQ M_1 N_1 P_1 Q_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро — 15. На ребрах $M_1 Q_1, M_1 N_1$ и PQ взяты точки X, Y, Z соответственно так, что $Q_1 X = N_1 Y = QZ = 5$.

- Пусть C — точка пересечения плоскости XYZ с ребром PN . Докажите, что $XYCZ$ — прямоугольник.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью XYZ .

18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 3 : 2$. Плоскость α параллельна прямой $A_1 F_1$ и проходит через точки M и E .

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F , а основанием сечение призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ плоскостью α .

19. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = BC = 6$ и $AA_1 = 12$, точки M и K — середины AB и BC соответственно. Точка N лежит на ребре BB_1 , причем $BN = 6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN .

а) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α .

20. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ длина ребра основания равна 4, а длина бокового ребра равна 2.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α , проходящей через середину ребра AB перпендикулярно отрезку, соединяющему середины ребер BC и $A_1 B_1$, делит ребро AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α .

21. Дана прямая призма $ABCA_1 B_1 C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро $B_1 C_1$. Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

22. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра $A_1 C_1$. Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок $A_1 C_1$, считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$ и $AB : BC = 2 : 7$.

23. Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, точка K — середина DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.

24. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм. На ребрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причем $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N — середина BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12, а ее высота равна 2.

25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M является серединой ребра BB_1 , а точка N — середина ребра A_1C_1 . Плоскость α , параллельная прямым AM и B_1N , проходит через середину отрезка B_1M .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка B_1C_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , если все ребра этой призмы равны 4.

26. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 5. На его ребре AA_1 отмечена точка M так, что $A_1M = 3$. Через точки M и B_1 проведена плоскость α , параллельная AC_1 .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении 1 : 4, считая от вершины D_1 .

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

27. В правильной четырехугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 9, боковое ребро равно 14. Точка K принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении 2 : 7, считая от вершины A_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и K , является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

28. В правильной четырехугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1 и D , пересекает стороны AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно, а сечение призмы плоскостью α является ромбом.

а) Докажите, что точка M — середина ребра AA_1 .

б) Найдите высоту призмы, если площадь основания равна 3, а площадь сечения равна 6.

29. В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра D_1C_1 , а на ребрах AA_1 и CC_1 отмечены точки Q и N так, что $AQ : A_1Q = 1 : 4$ и $CN : C_1N = 3 : 2$. Через точки M и N проведена плоскость α параллельно прямой CQ .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину B .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит объем параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$.

30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на серединах ребер A_1C_1 и BC отмечены точки M и N соответственно.

а) Докажите, что плоскость AB_1M делит отрезок A_1N в отношении 2 : 3, считая от вершины A_1 .

б) Найдите объем пирамиды $AMNB_1$, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 4.

31. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра A_1C_1 . Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1 , считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 7$.

32. В правильной четырёхугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На ребрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание сечение данной призмы плоскостью γ .

33. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на боковых ребрах AA_1 , BB_1 и CC_1 отмечены точки K , M и L соответственно так, что $AK : KA_1 = B_1M : MB = 2 : 1$, а плоскость KLM делит площадь боковой поверхности призмы пополам.

а) Докажите, что L — середина CC_1 .

б) Найдите площадь треугольника KLM , если все ребра призмы равны 3.

34. В правильной треугольной призме сторона AB основания равна 2, точка M — середина ребра CC_1 .

а) Докажите, что сечение A_1MB — равнобедренный треугольник.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения равна 6.

35. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно плоскости ABB_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , если все ребра призмы равны 12.