

1. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.
- а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
  - б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?
2. Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причём все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение  $b$ .
3. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий  $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$  и  $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$  совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.
4. Дана последовательность из нескольких натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.
- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
  - б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?
5. Перед каждым из чисел 14, 15, ..., 20 и 4, 5, ..., 8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
6. Каждое из чисел 5, 6, ..., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
7. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.
- а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?
  - б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?
8. В ряд выписаны числа:  $1^2, 2^2, \dots, (N-1)^2, N^2$ . Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «-» и находят получившуюся сумму.
- Может ли такая сумма равняться:
- а) 12, если  $N = 12$ ?
  - б) 0, если  $N = 50$ ?
  - в) 0, если  $N = 80$ ?
  - г) 5, если  $N = 90$ ?
9. Найдите все целые значения  $m$  и  $k$  такие, что  $3^m + 3^{2m} + 3^{3m} + \dots + 3^{k \cdot m} = 2010$ .
10. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.
- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
  - б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?
11. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отлично от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.
- а) Может ли в такой прогрессии быть десять членов?
  - б) Докажите, что число её членов меньше 100.
  - в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
  - г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами

**12.** Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

- а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
- б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

**13.** Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?