

1. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.
- Докажите, что высота этой пирамиды равна диагонали её основания.
  - Найдите площадь сечения, проходящего через вершину  $S$  этой пирамиды и через диагональ её основания.
2. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину  $S$  этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64.
- Докажите, что боковое ребро этой пирамиды больше, чем сторона основания.
  - Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.
3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  угол  $ASB$  равен  $36^\circ$ . На ребре  $SC$  взята точка  $M$  так, что  $AM$  — биссектриса угла  $SAC$ .
- Докажите, что  $AM = AB$ .
  - Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки  $A$ ,  $M$  и  $B$ , равна  $25\sqrt{3}$ . Найдите сторону основания.
4. В правильной четырёхугольной пирамиде  $PABCD$ , все ребра которой равны 4, точка  $K$  — середина бокового ребра  $AP$ .
- Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $K$  и параллельной прямым  $PB$  и  $BC$ .
  - Найдите площадь сечения.
5. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 12, а боковое ребро  $SA$  равно 13. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении  $5 : 1$ , считая от точки  $C$ .
  - Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .
6. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с основанием  $ABC$  стороны основания равны 6, а боковые рёбра 10. На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  находится точка  $E$ , а на ребре  $AM$  — точка  $L$ . Известно, что  $AD = AE = LM = 4$ .
- Докажите, что объем пирамиды  $LADE$  составляет  $\frac{4}{15}$  от объема пирамиды  $MABC$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $D$  и  $L$ .
7. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с основанием  $ABC$  стороны основания равны 6, а боковые рёбра 8. На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  находится точка  $E$ , а на ребре  $AM$  — точка  $L$ . Известно, что  $CD = BE = LM = 2$ .
- Докажите, что объем пирамиды  $LADE$  составляет  $\frac{1}{3}$  от объема пирамиды  $MABC$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $D$  и  $L$ .
8. Все рёбра правильной треугольной пирамиды  $SBCD$  с вершиной  $S$  равны 9. Основание  $O$  высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  — середина ребра  $SB$ , точка  $L$  лежит на ребре  $CD$  так, что  $CL : LD = 7 : 2$ .
- Докажите, что сечение пирамиды  $SBCD$  плоскостью  $S_1LM$  — равнобедренная трапеция.
  - Вычислите длину средней линии этой трапеции.
9. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с вершиной  $M$  высота равна 9, а боковые рёбра равны 15.
- Докажите, что сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $BC$  параллельно прямой  $MB$ , является прямоугольником.
  - Найдите площадь этого сечения.

- 10.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .
- Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит апофему грани  $ASB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $S$ .
  - Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .
- 11.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $MABCD$  с вершиной  $M$  стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16.
- Докажите, что прямые  $MC$  и  $BD$  перпендикулярны.
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $B$  и середину ребра  $MD$  параллельно прямой  $AC$ .
- 12.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $MABCD$  с вершиной  $M$  стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8.
- Докажите, что плоскость, проходящей через точку  $B$  и середину ребра  $MD$  параллельно прямой  $AC$ , делит ребро  $MC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $M$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.
- 13.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  провели сечение плоскостью, проходящей через сторону основания  $AB$  перпендикулярно ребру  $SC$ .
- Докажите, что площадь этого сечения относится к площади основания так же, как высота пирамиды относится к её боковому ребру.
  - Найдите площадь сечения если боковое ребро  $SA = 5$ , а сторона основания  $AB = 4$ .
- 14.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  боковое ребро  $SA = 6$ , а сторона основания  $AB = 4$ .
- Докажите, что утроенный объем пирамиды  $SABC$  равен произведению ребра  $SC$  на площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $AB$  перпендикулярно ребру  $SC$ .
  - Найдите площадь этого сечения.
- 15.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с основанием  $ABC$  стороны основания равны 6, а боковые рёбра — 10. На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  находится точка  $E$ , а на ребре  $AM$  — точка  $L$ . Известно, что  $AD = AE = LM = 4$ .
- Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $E$ ,  $D$  и  $L$ , проходит еще и через центр основания пирамиды.
  - Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.
- 16.** В треугольной пирамиде  $MABC$  основанием является правильный треугольник  $ABC$ , ребро  $MB$  перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро  $MA = 6$ . На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  — точка  $E$ , а на ребре  $AM$  — точка  $L$ . Известно, что  $AD = AL = 2$ , и  $BE = 1$ .
- Докажите, что  $ADE$  — равносторонний треугольник.
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $D$  и  $L$ .
- 17.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  проведено сечение через середины ребер  $AB$  и  $BC$  и вершину  $S$ .
- Докажите, что указанное сечение делит объем пирамиды в отношении  $1 : 7$ .
  - Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.
- 18.** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 64.
- Постройте прямую пересечения плоскости  $SAC$  и плоскости, проходящей через вершину  $S$  этой пирамиды, середину стороны  $AB$  и центр основания.
  - Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью  $SAC$  равна 64.

19. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $MABCD$ , все рёбра которой равны 12. Точка  $N$  — середина бокового ребра  $MA$ , точка  $K$  делит боковое ребро  $MB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $M$ .
- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $N$  и  $K$  параллельно прямой  $AD$ , является равнобедренной трапецией.
  - Найдите площадь этого сечения.
20. В основании правильной пирамиды  $PABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину  $B$  и середину ребра  $PD$  перпендикулярно этому ребру.
- Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен  $60^\circ$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды.
21. На ребре  $AB$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $Q$ , причём  $AQ : QB = 1 : 2$ . Точка  $P$  — середина ребра  $AS$ .
- Докажите, что плоскость  $DPQ$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
  - Найдите площадь сечения  $DPQ$ , если площадь сечения  $DSB$  равна 6.
22. На ребре  $AB$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $Q$ , причём  $AQ : QB = 1 : 2$ . Точка  $P$  — середина ребра  $AS$ .
- Докажите, что плоскость  $DPQ$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
  - Найдите площадь сечения  $DPQ$ , если площадь сечения  $DSB$  равна  $6\sqrt{5}$ .
23. В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $MABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер  $MA$  и  $MB$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная ребру  $MC$ .
- Докажите, что сечение плоскостью  $\alpha$  пирамиды  $MABC$  является параллелограммом.
  - Найдите площадь сечения пирамиды  $MABC$  плоскостью  $\alpha$ .
24. В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $MABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 4. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер  $MA$  и  $MB$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная ребру  $MC$ .
- Докажите, что сечение плоскостью  $\alpha$  пирамиды  $MABC$  является параллелограммом.
  - Найдите площадь сечения пирамиды  $MABC$  плоскостью  $\alpha$ .
25. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки  $G$  и  $F$  делят стороны основания  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $AG : GB = AF : FC = 1 : 5$ .
- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $MGF$  является равнобедренным треугольником.
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $MGF$ .
26. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как  $1 : 3$ .
- Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен  $45^\circ$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если боковое ребро пирамиды равно 4.
27. В основании пирамиды  $DABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 15$  и  $BC = 9$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AD$ . На ребре  $BC$  выбрана точка  $E$  так, что  $CE = 3$ , а на ребре  $AC$  выбрана точка  $F$  так, что  $CF = 5$ . Плоскость  $MEF$  пересекает ребро  $BD$  в точке  $N$ . Расстояние от точки  $M$  до прямой  $EF$  равно  $\sqrt{34}$ .
- Докажите, что  $N$  — середина ребра  $BD$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $MNF$ .
28. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна прямой  $AD$ .
- Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью  $\alpha$  — квадрат.
  - Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 2\sqrt{3}$ .

**29.** Все рёбра правильной треугольной пирамиды  $SBCD$  с вершиной  $S$  равны 9. Основание  $O$  высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой отрезка  $SS_1$ ,  $M$  — середина ребра  $SB$ , точка  $L$  лежит на ребре  $CD$  так, что  $CL : LD = 7 : 2$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SBCD$  плоскостью  $S_1LM$  — равнобедренная трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

**30.** Дана правильная треугольная пирамида  $SABC$  в которой  $AB = 9$ , точка  $M$  лежит на ребре  $AB$  так, что  $AM = 8$ . Точка  $K$  делит сторону  $SB$  так, что  $SK : KB = 7 : 3$ . Ребро  $SA = \sqrt{43}$ . Точки  $M$  и  $K$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , которая перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

- Докажите, что точка  $C$  принадлежит плоскости  $\alpha$ .
- Найдите площадь сечения  $\alpha$ .

**31.** Дана правильная треугольная пирамида  $SABC$  в которой  $AB = 6$ , точка  $M$  лежит на ребре  $AB$  так, что  $AM = 5$ . Точка  $K$  делит сторону  $SB$  так, что  $SK : KB = 4 : 3$ . Ребро  $SA = 4\sqrt{3}$ . Точки  $M$  и  $K$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , которая перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

- Докажите, что точка  $C$  принадлежит плоскости  $\alpha$ .
- Найдите площадь сечения  $\alpha$ .

**32.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  стороны основания равны 18, а боковые ребра — 15. Точка  $R$  принадлежит ребру  $SB$ , причем  $SR : RB = 2 : 1$ .

- Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $C$  и  $R$  параллельно  $BD$  делит ребро  $SA$  пополам.
- Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

**33.** В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$  с центром  $O$ . Точка  $N$  — середина ребра  $SC$ , точка  $L$  — середина ребра  $SA$ .

- Докажите, что плоскость  $BNL$  делит ребро  $SD$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $S$ .
- Найдите угол между плоскостями  $BNL$  и  $ABC$ , если пирамида правильная,  $SA = 8$ , а тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен  $\frac{\sqrt{7}}{5}$ .

**34.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $MABCD$  через середины сторон  $AB$  и  $AD$  параллельно боковому ребру  $AM$  проведена плоскость. Сторона основания пирамиды равна 20, а боковое ребро —  $20\sqrt{2}$ .

- Докажите, что сечение пирамиды этой плоскостью является пятиугольником с тремя прямыми углами.
- Найдите площадь этого сечения.

**35.** В четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  все рёбра равны 6, точка  $M$  — середина отрезка  $AS$ .

- Докажите, что прямая  $AS$  перпендикулярна плоскости  $BMD$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $BMD$ .

**36.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $FABCD$  с вершиной  $F$  сторона основания равна  $9\sqrt{2}$ , боковое ребро равно 15. Точка  $N$  делит высоту пирамиды в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $F$ . Через точки  $B$  и  $N$  параллельно прямой  $AC$  проведена плоскость  $\gamma$ , пересекающая ребро  $DF$  в точке  $M$ .

- Докажите, что точка  $M$  — середина отрезка  $DF$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\gamma$ .

**37.** Плоскость  $\alpha$  проходит через середины двух противоположных рёбер треугольной пирамиды и параллельна медиане одной из ее граней.

- Докажите, что среди медиан граней этой пирамиды в точности две являются параллельными к плоскости  $\alpha$ .
- Найдите площадь сечения данной пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если эти медианы перпендикулярны друг другу и равны 2.

- 38.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  боковое ребро  $SA$  равно 12, а сторона основания  $AB$  равна 6. В боковых гранях  $SAB$  и  $SAD$  провели биссектрисы  $AL$  и  $AM$  соответственно.
- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $ALM$  делит ребро  $SC$  пополам.
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $ALM$ .
- 39.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 8, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 2$ ,  $SK = 1$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ .
- 40.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно  $\sqrt{21}$ . На ребрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 4$ ,  $SK : KB = 1 : 3$ .
- Докажите, что плоскость  $CKM$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
  - Найдите объём пирамиды  $BCKM$ .
- 41.** Точка  $E$  лежит на высоте  $SO$ , а точка  $F$  — на боковом ребре  $SC$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ , причём  $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$ .
- Докажите, что плоскость  $BEF$  пересекает ребро  $SD$  в его середине.
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $BEF$ , если  $AB = 8$ ,  $SO = 14$ .
- 42.** В правильном тетраэдре  $SABC$  точка  $M$  — середина ребра  $AB$ , а точка  $N$  расположена на ребре  $SC$  так, что  $SN : NC = 3 : 1$ .
- Докажите, что плоскости  $SMC$  и  $ANB$  перпендикулярны.
  - Найдите длину отрезка  $MN$ , если длина ребра  $AB$  равна 8.
- 43.** Точка  $E$  лежит на боковом ребре  $SC$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  и делит его в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $S$ . Через точку  $E$  и середины сторон  $AB$  и  $AD$  проведена плоскость  $\alpha$ .
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит высоту пирамиды в отношении  $3 : 2$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна 12, а высота —  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .
- 44.** В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое ребро вдвое больше стороны основания.
- Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SE$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SB$  в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $B$ .
  - Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SE$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .
- 45.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  и пересекает ребра  $AS$  и  $CS$  в точках  $K$  и  $P$  соответственно.
- Докажите, что точка пересечения прямых  $MP$  и  $KN$  лежит на высоте пирамиды  $SABC$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $AB = 24$ ,  $AS = 28$ ,  $SK = 7$ .
- 46.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .
- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
  - Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 10$ ,  $BC = 8$ ,  $SO = 8$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .

47. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$ . Точка  $M$  — середина  $SA$ , на ребре  $SB$  отмечена точка  $N$  так, что  $SN : NB = 1 : 2$ .
- Докажите, что плоскость  $CMN$  параллельна прямой  $SD$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $CMN$ , если все рёбра равны 12.
48.  $SMNK$  — правильный тетраэдр. На ребре  $SK$  отмечена точка  $P$  такая, что  $KP : PS = 1 : 3$ , точка  $L$  — середина ребра  $MN$ .
- Докажите, что плоскости  $SLK$  и  $MPN$  перпендикулярны.
  - Найдите длину отрезка  $PL$ , если длина ребра  $MN$  равна 4.
49. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  точка  $L$  — середина бокового ребра  $SB$ . На ребре  $SA$  взята точка  $K$  так, что  $SK : KA = 1 : 2$ .
- Докажите, что плоскость  $DKL$  параллельна боковому ребру  $SC$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $DKL$ , если все ребра пирамиды равны 24.
50. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое ребро вдвое больше стороны основания.
- Докажите, что плоскость, проходящая через середины ребер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит высоту  $SH$  треугольника  $ASB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $S$ .
  - Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины ребер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .
51. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  каждое ребро равно  $5\sqrt[4]{2}$ . Через середины сторон  $AD$  и  $DC$  и середину высоты пирамиды проведена плоскость  $\alpha$ .
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна ребру  $SD$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ .
52. Основанием правильной пирамиды  $PABCD$  является квадрат  $ABCD$ . Сечение пирамиды проходит через вершину  $B$  и середину ребра  $PD$  перпендикулярно этому ребру.
- Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен  $60^\circ$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды, если  $AB = 30$ .
53. В четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  длины всех боковых ребер равны длине ребра  $AD$ , а длина каждого из рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  ровно в два раза меньше, чем длина ребра  $AD$ .
- Докажите, что высота пирамиды проходит через середину ребра  $AD$ .
  - Найдите, в каком отношении плоскость  $BMN$  делит высоту пирамиды, считая от вершины  $S$ , если точка  $M$  — середина ребра  $SD$ , а точка  $N$  делит ребро  $SC$  в отношении  $SN : NC = 3 : 1$ .
54. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как  $1 : 3$ .
- Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен  $45^\circ$ .
  - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если боковое ребро пирамиды равно 4.
55. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$ . На ребрах  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  отмечены точки  $L$ ,  $K$ ,  $N$  и  $M$  соответственно так, что четырёхугольник  $KLMN$  — трапеция с основаниями  $KL = 3$  и  $MN = 2$ . Известно, что  $SK : KB = 3 : 1$ .
- Докажите, что плоскость  $KLM$  пересекает ребра  $SC$  и  $SD$  в их серединах.
  - Найдите высоту  $SH$  пирамиды, если точка пересечения диагоналей основания пирамиды совпадает с точкой  $H$ , площадь основания равна 24, а площадь сечения  $KLMN = 10$ .
56. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  в точках  $L$ ,  $K$ ,  $N$  и  $M$  соответственно, причем  $SK : KB = 3 : 1$ , а точки  $L$  и  $M$  — середины ребер  $SA$  и  $SD$ .
- Докажите, что четырёхугольник  $KLMN$  является трапецией, длины оснований которой относятся как  $2 : 3$ .
  - Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями  $ABC$  и  $\alpha$  равен  $30^\circ$ , площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$  равна  $10\sqrt{2}$ , а площадь основания пирамиды равна 32.

57. Грани  $ABD$  и  $ACD$  тетраэдра  $ABCD$  являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах  $AB$ ,  $AD$  и  $CD$  отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно, причём  $BK = 2$ ,  $AL = 4$ ,  $MD = 3$ .

- Докажите, что плоскость  $KLM$  перпендикулярна ребру  $CD$ .
- Найдите длину отрезка пересечения грани  $ABC$  и плоскости  $KLM$ .

58. В пирамиде  $ABCD$  рёбра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  попарно перпендикулярны, а  $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$ .

- Докажите, что  $BD = CD$ .
- На рёбрах  $DA$  и  $DC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$ . Найдите площадь сечения  $MNB$ .

59. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  (точка  $S$  — вершина,  $BD$  — диагональ основания) образует с основанием угол  $60^\circ$ , сторона основания равна 4,8. Через среднюю линию треугольника  $ABD$ , не пересекающую  $BD$  и точку на высоте пирамиды, отстоящей от основания на  $\frac{1}{6}$  всей высоты пирамиды, проведена плоскость  $\alpha$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна ребру  $SC$ .
- Найдите объем пирамиды  $SKLM$ , где  $K$ ,  $L$  и  $M$  — точки пересечения  $\alpha$  соответственно с ребрами  $SB$ ,  $SD$  и  $SC$ .

60. На ребре  $AB$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $Q$ , причём  $AQ : QB = 1 : 2$ . Точка  $P$  — середина ребра  $AS$ .

- Докажите, что плоскость  $DPQ$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите площадь сечения  $DPQ$ , если площадь сечения  $DSB$  равна 18.

61. На боковом ребре  $FD$  правильной четырехугольной пирамиды  $FABCD$  отмечена точка  $M$  так, что  $FM : FD = 2 : 5$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины ребер  $AD$  и  $BC$  соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $MPQ$  есть равнобедренная трапеция.
- Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость  $MPQ$  разбивает пирамиду.

62. На ребрах  $AB$  и  $BC$  треугольной пирамиды  $DABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM : MB = CN : NB = 2 : 1$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины ребер  $DA$  и  $DC$  соответственно.

- Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость  $PQM$  делит пирамиду.

63. Точки  $M$  и  $N$  соответственно — середины ребер  $AB$  и  $BC$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Через точки  $M$  и  $N$  проведена плоскость  $\alpha$ , которая пересекает ребра  $AS$  и  $CS$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что прямые  $PM$  и  $QN$  параллельны друг другу.

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна ребру  $BS$ .
- Найдите площадь пятиугольника, который получается в сечении пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $AB = 16$  и  $BS = 18$ .

64. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны. Через середины ребер  $AB$  и  $CC_1$  проведена плоскость  $\alpha$ . Тангенс угла наклона плоскости  $\alpha$  к основанию равен  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит одно из ребер основания  $A_1B_1C_1$  пополам.
- Найдите отношение объемов, на которые плоскость  $\alpha$  делит призму  $ABCA_1B_1C_1$ .

65. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  стороны основания  $ABC$  равны 12, а боковые ребра — 25. На ребрах  $AB$ ,  $AC$  и  $SA$  отмечены точки  $F$ ,  $E$  и  $K$  соответственно. Известно, что  $AE = AF = 10$ ,  $AK = 15$ .

- Докажите, что объем пирамиды  $KAEF$  составляет  $\frac{5}{12}$  от объема пирамиды  $SABC$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $KEF$ .

66. Дана правильная пирамида  $SABC$  с основанием  $ABC$ , точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $AB$  и  $SC$  соответственно. Точки  $N$  и  $L$  на сторонах  $BC$  и  $SA$  соответственно расположены таким образом, что  $LA = 4SL$  и прямые  $NL$  и  $MK$  пересекаются.

- Докажите, что прямые  $LK$ ,  $MN$  и  $BS$  пересекаются в одной точке.
- Найдите отношение  $CN : NB$ .

67. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  равны 10. Точка  $O$  — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой  $SA$  и проходящая через точку  $O$ , пересекает рёбра  $SC$  и  $SD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Точка  $N$  делит ребро  $SD$  в отношении  $SN : ND = 2 : 3$ .

- Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $SC$ .
- Найдите длину отрезка, по которому плоскость  $OMN$  пересекает грань  $SBC$ .

68. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $MN$  и пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ .

- Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна ребрам  $AB$  и  $CD$ .
- Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $BK = 1$  и  $KC = 5$ .

69. В пирамиде  $SABC$  ребра  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  попарно перпендикулярны,  $AB = BC = AC = 4\sqrt{2}$ .

- Докажите, что  $SB = SC$ .
- На ребрах  $SA$  и  $SC$  взяты точки  $K$  и  $L$  соответственно, причем  $SK : KA = SL : LC = 3 : 4$ . Найдите площадь сечения  $BKL$ .

70. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  на боковом ребре  $SE$  отмечена точка  $K$  такая, что  $SK : KE = 2 : 3$ .

- Докажите, что плоскость  $ACK$  делит ребра  $SF$  и  $SD$  пополам.
- Найдите отношение, в котором плоскость  $ACK$  делит объем пирамиды  $SABCDEF$ .

71. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  равна 6. Боковое ребро наклонено к основанию под углом  $60^\circ$ . Через меньшую диагональ основания  $AC$  проведено сечение, которое пересекает высоту пирамиды в точке, удаленной от основания на расстояние  $\sqrt{3}$ .

- Докажите, что это сечение перпендикулярно противоположному к  $AC$  боковому ребру пирамиды  $SE$ .
- Найдите площадь сечения.

72. В правильном тетраэдре  $SNEG$  точки  $K$  и  $L$  — середины рёбер  $NE$  и  $SG$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $KL$  и пересекает ребро  $EG$  в точке  $P$ .

- Докажите, что прямая  $KL$  перпендикулярна ребрам  $NE$  и  $SG$ .
- Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $EP = 1$ ,  $PG = 5$ .

73. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На ребре  $AC$  отмечена точка  $M$ , а на продолжении ребра  $BC$  за точку  $C$  — точка  $N$  так, что  $CM = CN = 2$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $SNM$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABC$  плоскостью  $SNM$ .

74. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  известно, что  $AB = 1$ . Через точку  $O$  пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру  $SC$  провели плоскость  $\alpha$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $B$  и  $D$ .
- В каком отношении плоскость  $\alpha$  делит ребро  $SC$ , считая от вершины  $S$ , если площадь сечения равна  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ?

75. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  и пересекает ребро  $SA$  в точке  $K$ . Сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  является правильным треугольником площадью  $2\sqrt{3}$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $AC$ .
- б) Найдите, в каком отношении точка  $K$  делит ребро  $SA$ , считая от точки  $S$ , если объём пирамиды равен  $36\sqrt{6}$ .

76. На ребрах  $BC$ ,  $AB$  и  $AD$  правильного тетраэдра  $ABCD$  отмечены точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно. Известно, что  $BL : LC = AM : MB = AN : ND = 1 : 2$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через точки  $L$ ,  $M$  и  $N$ , делит ребро  $CD$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $C$ .
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 6$ .

77. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  через точку  $M$  на ребре  $AS$  параллельно плоскости  $SBD$  проведена плоскость  $\alpha$ . Сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  является прямоугольным треугольником.

- а) Докажите, что  $\angle ASB = 60^\circ$ .
- б) Найдите отношение  $SM : MA$ , если объём пирамиды  $SABCD$  равен 675, а объём пирамиды, отсекаемой плоскостью  $\alpha$  от пирамиды  $SABCD$ , равен 100.

78. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $K$  лежит на ребре  $CB$ , причем  $CK : KB = 1 : 2$ . Точка  $L$  лежит на ребре  $AB$ , причем  $AL : LB = 1 : 3$ . Через точки  $A$  и  $K$  параллельно  $DL$  проведено секущая плоскость..

- а) Докажите, что сечением является равнобедренный треугольник.
- б) Найдите площадь сечения, если ребра тетраэдра равны 1.

79. Все ребра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  равны 16. Точка  $O$  — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой  $SB$  и проходящая через точку  $O$ , пересекает рёбра  $SA$  и  $SD$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Точка  $K$  делит ребро  $SA$  в отношении  $SK : KA = 3 : 5$ .

- а) Докажите, что точка  $L$  — середина ребра  $SD$ .
- б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость  $OKL$  пересекает грань  $SCD$ .