1. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60°.

а) Докажите, что угол BA_1C_1 больше угла BAC.

б) Расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 равно 5, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно 8. Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между NT и SC.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию между прямой AA_1 и плоскостью BCC_1.

б) Найдите это расстояние.

4. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

5. Расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 5, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно 8. Двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60°.

а) Докажите, что расстояние между боковыми ребрами BB_1 и CC_1 равно 7.

б) Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро $PA = 12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении 2 : 1, считая от вершины P.

б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK.

7. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми A_1B и AM равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую A_1B.

б) Найдите это расстояние.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60°.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

9. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми A_1B и AM равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую A_1B.

б) Найдите это расстояние.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку C отмечена точка N так, что $B_1C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и MN.

11. Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17},\ SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC.

б) Найдите расстояние между ребрами BC и SA.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро $SA = 6$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 2 : 7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении 2 : 7, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.

14. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1.

а) Докажите, что $CM \perp AB$.

б) Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро $SA = 8$. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении 1 : 3, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KN.

16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2.

а) Докажите, что плоскости A_1BD и B_1D_1C параллельны.

б) Найдите расстояние между плоскостями A_1BD и B_1D_1C.

17. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5, AA_1 = 5, AD = 3$.

а) Докажите, что прямые A_1B и B_1D перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1D.

18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O_1 — центр квадрата $ABCD$, точка O_2 — центр квадрата CC_1D_1D.

а) Докажите, что прямые A_1O_1 и B_1O_2 скрещиваются.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1O_1 и B_1O_2, если ребро куба равно 1.

19. В правильном тетраэдре $MNPQ$ через биссектрисы NA и QB граней MNP и QNP проведены параллельные плоскости.

а) Найдите отношение суммы объемов отсекаемых от $MNPQ$ тетраэдров к объему $MNPQ$

б) Найдите расстояние между NA и QB, если ребро тетраэдра равно 1.

20. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$.

а) Найдите угол между прямыми BC и KE.

б) Найдите расстояние между прямыми BC и KE, если ребро тетраэдра равно $\sqrt{6}$.

21. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1.

б) Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1.

22. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 15$ и $BC = 25$. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На ребрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK = CN = 8$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная ребру SB.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB.

б) Найдите расстояние между прямыми SD и KM.

23. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Точка M — середина ребра B_1C_1, точка N лежит на ребре AC, причем $AN : NC = 15 : 1$. Катет AC в четыре раза больше бокового ребра AA_1 призмы.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1.

б) Найдите расстояние между прямыми MN и CA_1, если $AC = 16$, $BC = 2\sqrt{17}$.

24. Основанием пирамиды $ABCD$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна 4. Боковое ребро CD перпендикулярно плоскости основания и имеет длину $\sqrt{2}$. Пусть M — середина ребра BC, а N — середина ребра AB.

а) Докажите, что угол между прямыми DM и CN равен 45°.

б) Найдите расстояние между прямыми DM и CN.

25. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60°. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 1 : 2$. Расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$.

а) Докажите, что основания высот треугольников ABC и PBC, проведенных к стороне BC, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP.

26. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{2}$. На ребре BB_1 выбрана точка K так, что $BK : B_1K = 2 : 3$. Угол между плоскостями ABC и AKC равен 45°.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1, если $KC = 8$.

27. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 — середина AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

28. Точка Q симметрична вершине S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ относительно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что плоскости SBC И QDA параллельны.

б) Найдите расстояние между плоскостями SBC и QDA, если сторона основания пирамиды $SABCD$ равна 2, а ее боковое ребро равно $\sqrt{2022}$.

29. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = BC = 6$, $AA_1 = 12$ точки M и K — середины AB и BC соответственно, точка N лежит на ребре BB_1, причем $BN = 6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1.

б) Найдите расстояние между плоскостями KMN и α.

30. Дан правильный треугольник ABC. Точка D лежит вне плоскости ABC, $\cos\angle BAD = \cos\angle DAC = 0,3$.

а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC, если $AC = 6$.

31. Основание $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина S расположена на оси OO_1 цилиндра (O_1 — центр верхнего основания цилиндра). Объем цилиндра равен 450π, объем пирамиды равен 50.

а) Докажите, что $O_1S : SO = 5 : 1$.

б) Найдите расстояние между AS и CD, если диаметр основания цилиндра равен $5\sqrt{2}$.

32. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и $AC = 16$. На ребре BB_1 выбрана точка F так, что $BF : B_1F = 3 : 5$. Угол между плоскостями AA_1C и AFC равен 45°.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1, если $FC = 10$.

33. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Точки M и N — середины ребер BC и AB соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми SM и CN равен 45°.

б) Найдите расстояние между SM и CN.

34. На высоте SO правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ взяли точку M так, что $SM : MO = 2 : 3$. Через точку M параллельно грани ADS провели плоскость α.

а) Докажите, что расстояние от прямой BC до плоскости α относится к расстоянию между прямыми BC и AS как 4 : 5.

б) Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α, если все рёбра пирамиды равны 10.

35. Точка M — середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C.

б) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB = 12$, $AD = 12$ и $AA_1 = 6$.

36. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.

а) Докажите, что ребро SD перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB.

37. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 8$ и $BC = 4$.

38. Основанием треугольной призмы $ABC_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной 1, а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани A_1B перпендикулярна плоскости основания. Точка M — середина стороны BC.

а) Докажите, что прямые AM и A_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1C и BC_1.

39. Дан цилиндр с центрами нижнего и верхнего оснований O_1 и O_2 соответственно. Объём цилиндра, равен $\pi\sqrt{6}$. На окружности нижнего основания выбраны точки A и B, а на боковой поверхности выбрана, точка C, равноудалённая от оснований.

а) Докажите, что объём тетраэдра O_1ABC не превосходит $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

б) Найдите расстояние между прямыми AO_1 и CO_2, если отрезки BO_2 и CO_1 пересекаются, $\angle AO_1B = 120^\circ$ и $\angle O_2CA = 90^\circ$.

40. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точки M и N середины ребер SC и AD соответственно. Плоскость α проходит через прямую BM параллельно SN.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро CD в отношении 1 : 2.

б) Найдите расстояние от прямой SN до плоскости α, если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро равно 12.

41. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно 9, а высота пирамиды SO равна $3\sqrt{5}$, точки M и T — середины отрезков BC и SM соответственно.

а) Докажите, что AT — высота пирамиды, проведенная к грани SBC.

б) Найдите расстояние между прямыми AT и SB.

42. Диагонали BE и DF основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в точке P, а диагонали FE_1 и EF_1 боковой грани EFF_1E_1 пересекаются в точке Q.

а) Докажите, что прямая QP параллельна плоскости CB_1E_1.

б) Найдите расстояние между прямой QP и плоскостью CB_1E_1, если сторона основания призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна $2\sqrt{3}$, а ее высота равна 4.

43. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки M и N — середины сторон AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1N = 7\sqrt{2}$.

44. Через вершины A_1 и C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость α, параллельная прямой BC_1. Сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB пополам.

б) Найдите расстояние от прямой BC_1 до плоскости α.

45. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD, если $AB = 8\sqrt{3}$, $AD = 5\sqrt{3}$.

46. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Точки E и D — середины ребер BC и AB соответственно.

а) Докажите, что угол между SE и CD равен 45°.

б) Найдите расстояние между прямыми SE и CD.

47. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, $AB = BC = 2$. На боковом ребре AA_1, равном 4, выбрана точка M такая, что угол BMC_1 — прямой.

а) Докажите, что тангенс угла между прямыми MC и BC_1 равен $\sqrt{14}$.

б) Найдите расстояние между прямыми MC и BC_1.

48. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 6$. Длины боковых ребер пирамиды равны $SA = \sqrt{3},\ SB = 2\sqrt{7},\ SD = \sqrt{39}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите длину ребра SC.