

1. Точка  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . На продолжении отрезка  $AO$  за точку  $O$  отмечена точка  $K$  так, что  $BK = OK$ .
- Докажите, что четырехугольник  $ABKC$  вписанный.
  - Найдите длину отрезка  $AO$ , если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$  равны 3 и 12 соответственно, а  $OK = 5$ .
2. В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $M$ , причём  $AM = 2R$  и  $CM = 3R$ .
- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
  - Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что  $R = 2$ .
3. В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $D$ , причём  $AD = R$ .
- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
  - Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите площадь треугольника  $BEF$ , если известно, что  $R = 5$  и  $CD = 15$ .
4. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $BC$  в точке  $P$  и пересекает отрезок  $BO$  в точке  $Q$ . При этом отрезки  $OC$  и  $QP$  параллельны.
- Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
  - Найдите площадь треугольника  $BQP$ , если точка  $O$  делит высоту  $BD$  треугольника в отношении  $BO : OD = 3 : 1$  и  $AC = 2a$ .
5. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Вписанная в него окружность с центром  $O$  касается боковой стороны  $BC$  в точке  $P$  и пересекает биссектрису угла  $B$  в точке  $Q$ .
- Докажите, что отрезки  $PQ$  и  $OC$  параллельны.
  - Найдите площадь треугольника  $OBC$ , если точка  $O$  делит высоту  $BD$  треугольника в отношении  $BO : OD = 3 : 1$  и  $AC = 2m$ .
6. Первая окружность с центром  $O$ , вписанная в равнобедренный треугольник  $KLM$ , касается боковой стороны  $KL$  в точке  $B$ , а основания  $ML$  — в точке  $A$ . Вторая окружность с центром  $O_1$  касается основания  $ML$  и продолжений боковых сторон.
- Докажите, что треугольник  $OLO_1$  прямоугольный.
  - Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и  $AK = 16$ .
7. В треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны  $AC$  в точке  $M$ .
- Докажите, что отрезок  $BM$  не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.
  - Найдите  $\sin \angle BMC$ , если известно, что отрезок  $BM$  в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.
8. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CH$  из вершины прямого угла  $C$ . В треугольники  $ACH$  и  $BCH$  вписаны окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно, касающиеся прямой  $CH$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.
- Докажите, что прямые  $AO_1$  и  $CO_2$  перпендикулярны.
  - Найдите площадь четырёхугольника  $MO_1NO_2$ , если  $AC = 20$  и  $BC = 15$ .
9. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $BC$ ,  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Прямая  $KM$  вторично пересекает в точке  $P$  окружность радиуса  $AM$  с центром  $A$ .
- Докажите, что прямая  $AP$  параллельна прямой  $BC$ .
  - Пусть  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AM = 3$ ,  $CM = 2$ ,  $Q$  — точка пересечения прямых  $KM$  и  $AB$ , а  $T$  — такая точка на отрезке  $PQ$ , что  $\angle OAT = 45^\circ$ . Найдите  $QT$ .

10. Угол  $BAC$  треугольника  $ABC$  равен  $\alpha$ . Сторона  $BC$  является хордой такой окружности с центром  $O$  и радиусом  $R$ , которая проходит через центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .
- Докажите, что около четырёхугольника  $ABOC$  можно описать окружность.
  - Известно, что в четырёхугольник  $ABOC$  можно вписать окружность. Найдите радиус  $r$  этой окружности, если  $R = 6$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .
11. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $BC$  в точке  $K$ . К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе  $AP$  треугольника и пересекающая стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.
- Докажите, что угол  $MOC$  равен углу  $NOK$ .
  - Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если отношение площадей трапеции  $AMNP$  и треугольника  $ABC$  равно  $2 : 7$ ,  $MN = 2$ ,  $AM + PN = 6$ .
12. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $BC$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно,  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно. Прямые  $MN$  и  $EF$  пересекаются в точке  $D$ .
- Докажите, что треугольник  $DFN$  равнобедренный.
  - Найдите площадь треугольника  $BED$ , если  $AB = 20$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ .
13. Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность с центром  $O$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Прямая  $BO$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $CON$  вторично в точке  $P$ .
- Докажите, что точка  $P$  лежит на прямой  $MN$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABP$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 24.
14. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BK$ .
- Докажите, что  $\frac{AK}{AB} = \frac{CK}{BC}$ .
  - Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 13$ ,  $BC = 7$  и  $BK = \frac{7\sqrt{13}}{4}$ .
15. В треугольник  $ABC$  вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны  $AC$  в точке  $M$ , причём  $AM = 8$  и  $CM = 12$ .
- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
  - Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ .
16. В прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 4$ ,  $BC = 3$  вписана окружность с центром  $O$ , касающаяся сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  треугольника в точках  $R$ ,  $Q$ ,  $P$  соответственно.
- Докажите, что  $AO \cdot BO \cdot CO = 10$ .
  - Найдите площадь треугольника  $PQR$ .
17. Окружность с центром  $O$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $BC$ ,  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Прямая  $KM$  вторично пересекает в точке  $P$  окружность радиуса  $AM$  с центром  $A$ .
- Докажите, что прямая  $AP$  параллельна прямой  $BC$ .
  - Пусть  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AM = 3$ ,  $CM = 2$ ,  $Q$  — точка пересечения прямых  $KM$  и  $AB$ , а  $T$  — такая точка на отрезке  $PQ$ , что  $\angle OAT = 45^\circ$ . Найдите  $QT$ .
18. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . На катете  $AC$  взята точка  $M$ . Окружность с центром  $O$  и диаметром  $CM$  касается гипотенузы в точке  $N$ .
- Докажите, что прямые  $MN$  и  $BO$  параллельны.
  - Найдите площадь четырёхугольника  $BOMN$ , если  $CN = 8$ ,  $AM : MC = 1 : 3$ .

19. В треугольнике  $ABC$   $AB = 3$ ,  $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$ . Хорда  $KN$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , пересекает отрезки  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $L$  соответственно. Известно, что  $\angle ABC = \angle CML$ , площадь четырёхугольника  $ABLM$  равна 2,  $LM = 1$ .

- Докажите, что треугольник  $KNC$  равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника  $KNC$ .

20. В каждый угол равнобедренного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = 10$ ,  $AC = BC = 13$ , вписана окружность единичного радиуса, точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  центры этих окружностей. Найдите:

- радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ;
- площадь треугольника  $O_1, O_2, O_3$ .

21. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , делит медиану  $BM$  на три равные части.

- Докажите, что  $BC : CA : AB = 5 : 10 : 13$ .
- Найдите радиус вписанной окружности, если  $BM = 12$ .

22. На стороне  $KM$  остроугольного треугольника  $PKM$  ( $PK \neq PM$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $PS$  в точке  $T$ ,  $PS = 8$ ,  $TS = 6$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $PKM$ .

- Найдите  $PH$ .
- Полуокружность пересекает стороны  $PK$  и  $PM$  в точках  $L$  и  $N$  соответственно. Найдите коэффициент подобия треугольников  $PKM$  и  $PNL$ , если радиус полуокружности равен 20.

23. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник  $ABC$ , в котором  $\cos \angle ABC = 0,8$ . Эта окружность касается средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $AC$ .

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

24. Окружность вписана в треугольник  $ABC$ ,  $P$  — точка касания окружности со стороной  $AB$ , точка  $M$  — середина  $AB$ .

- Докажите, что  $MP = \frac{|AC - CB|}{2}$ .

- Найдите углы треугольника, если  $MC = MA$ ,  $AC > BC$ ,  $MP = \frac{r}{2}$ .

25. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузу  $AB$  опущена высота  $CH$ . В треугольнике  $ACH$  проведена биссектриса  $CE$  угла  $ACH$ .

- Докажите, что треугольник  $BCE$  — равнобедренный.
- Найдите  $EO$ , где  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , и известно, что  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ .

26. Точка  $D$  лежит на основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Точки  $I$  и  $J$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $ABD$  и  $CBD$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $BI$  и  $DJ$  параллельны.
- Найдите  $IJ$ , если  $AC = 12$ ,  $\cos \angle BDC = \frac{3}{7}$ .

27. Первая окружность проходит через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  и пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Вторая окружность проходит через точки  $D$  и  $E$  и пересекает продолжения сторон  $BC$  и  $AC$  за вершину  $C$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

- Докажите, что прямая  $MN$  параллельна прямой  $AB$ .
- Прямые  $MD$  и  $NE$  вторично пересекают первую окружность в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Найдите ее радиус, если  $AX = XY = 2$ , а  $AB = 4$ .

**28.** Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ .

а) Докажите, что  $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$ .

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , до стороны  $BC$ , если  $B_1C_1 = 9$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

**29.** Окружность с центром  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ . Касательная к окружности пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно.

а) Докажите, что сумма углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $180^\circ$ .

б) Найдите  $DE$ , если  $AC = BC$ , радиус окружности равен 3,  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$ , а разность углов  $AOD$  и  $BOE$  равна  $60^\circ$ .

**30.** Биссектриса  $AD$  большего угла треугольника  $ABC$  со сторонами 24, 40 и 56 делит его на два треугольника, в каждый из них вписана окружность.

а) Докажите, что радиусы этих окружностей относятся как 9 : 10.

б) Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой  $AD$ .

**31.** Дан треугольник  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  пересекается с биссектрисой угла  $BAC$  в точке  $K$ , лежащей на стороне  $BC$ .

а) Докажите, что  $AC^2 = BC \cdot CK$ .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $AKC$ , если  $\sin B = 0,6$  и сторона  $AC = 24$ .

**32.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $BD + CE = BC$ , точка  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что точки  $A, E, I$  и  $D$  лежат на одной окружности.

б) Точка  $D'$  симметрична точке  $D$  относительно прямой  $AI$ . Найдите радиус описанной окружности треугольника  $EDD'$ , если  $D'E = 2$ , а радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$  равен  $\frac{9}{2}$ .

**33.** В треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны  $AC$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что отрезок  $BM$  не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите  $\sin \angle BMC$ , если известно, что отрезок  $BM$  в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

**34.** Периметр треугольника  $ABC$  равен 24. Точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Отрезок  $EF$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

а) Докажите, что  $AC = 6$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$ .

**35.** Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность  $\omega_1$  касается стороны  $BC$  в точке  $N$  так, что  $CN : NB = 1 : 2$ . Окружность  $\omega_2$  касается стороны  $BC$  в точке  $M$  так, что  $BM : MC = 1 : 2$ , а также касается продолжения стороны  $AC$  за точку  $C$ .

а) Докажите, что прямая  $AB$  касается окружности  $\omega_2$ .

б) Найдите угол  $BAC$ , если  $BC \perp AC$ .

**36.** В треугольнике  $ABC$  высота  $CH$  и медиана  $CK$  делят угол  $ACB$  на три равных угла. Площадь треугольника  $ABC$  равна  $1,5 + \sqrt{3}$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности.

37. Периметр треугольника  $ABC$  равен 36. Точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Отрезок  $EF$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

а) Докажите, что  $AC = 9$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$ .

38. В прямоугольной трапеции  $ABCD$  с меньшей боковой стороной  $AB = 4$  и  $\angle ADC = \operatorname{arctg} 2$  из вершины  $D$  на диагональ  $AC$  опущен перпендикуляр  $DH$ . При этом треугольники  $ABC$  и  $DHA$  равны. Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $DHA$ .

а) Докажите, что прямая  $O_1O_2$  параллельна  $CD$ .

б) Найдите площадь четырёхугольника  $O_1CDO_2$ .

39. Окружность с центром в точке  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ , пересекает отрезок  $AO$  в точке  $M$  и касается стороны  $AB$  в точке  $N$ . Прямые  $NM$  и  $BO$  параллельны.

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

б) Прямая  $BO$  пересекает вписанную окружность в точке  $L$  ( $BL > BO$ ). Найдите отношение площади четырёхугольника  $BNML$  к площади треугольника  $ABC$ , если  $\cos \angle ABC = \frac{7}{9}$ .

40. Через центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , проведена прямая, параллельная стороне  $AC$  и пересекающая стороны  $BA$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника  $MBN$  равен сумме  $AB + BC$ .

б) Найдите длину отрезка  $MN$ , если  $BA = 11$ ,  $BC = 13$ ,  $AC = 12$ .

41. В треугольнике  $ABC$   $BC = 8$ ,  $AC = 7$  проведена биссектриса  $BE$ , которая пересекает сторону  $AC$  в точке  $E$ , причем известно, что центр  $O$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности делит  $BE$  в отношении  $BO : OE = 2 : 1$ .

а) Докажите, что сторона  $AB$  делится точкой касания вписанной окружности в отношении  $5 : 7$ , считая от точки  $A$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .