

1. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 1 и 4.

2. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

3. Хорды AD , BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

- Докажите, что эти хорды равны.
- Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E, F последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

5. Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .

- Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
- Найдите площадь треугольника DVC , если $AK = 3$ и $MK = 12$.

6. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

- Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

7. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E , лежащая на одной окружности с точками A, C и D . Другая окружность, проходящая через точки A, B и C , касается прямой CD , $AB = 12$, $BE : EC = 4 : 5$.

- Докажите, что треугольник ACD подобен треугольнику ABE .
- Найдите BC .

8. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C . На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая l пересекает окружность ω в точках A и D , окружность ω_1 — в точках A и E , а окружность ω_2 — в точках M и N .

- Докажите, что $MD = NE$.
- Найдите радиус круга, касающегося окружностей ω , ω_1 и ω_2 , если известно, что $AC = 10$, $BC = 6$.

9. Дана окружность с диаметром AB . Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D , а диаметр AB в точке E . На дуге CE , не содержащей точки D , взята точка M , отличная от точек C и E . Луч BM пересекает первую окружность в точке N , а вторую в точке M_1 .

- Докажите, что точка N — середина отрезка MM_1 .
- Найдите длину отрезка MN , если известно, что $CN = 6$, $DN = 13,5$.

10. Две окружности имеют общий центр O . На окружности большего радиуса выбрана точка F .

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки F до концов диаметра меньшей окружности не зависит ни от выбора точки F , ни от выбора диаметра.

б) Известно, что радиусы окружностей равны 10 и 24. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются концы диаметра меньшей окружности и точка F , тангенс угла F этого треугольника равен $\frac{1}{4}$.

11. К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B . Через точку C , лежащую на отрезке AB , проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E , причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE , если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

12. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60° . Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O .

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

13. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD , если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

14. Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK : KA$.

15. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая MK , пересекающая обе окружности в точках M и K , причём точка A находится между ними.

а) Докажите, что треугольники BMK и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой MK , если $O_1O_2 = 5$, $MK = 7$.

16. Две окружности касаются внешним образом в точке C . Прямая касается меньшей окружности в точке A , а большей — в точке B , отличной от A . Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке D , прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E .

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD .

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL , если радиусы окружностей равны 2 и 5.

17. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

18. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH .

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$.

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH , вторично пересекающей отрезок AC в точке P , а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH , вторично пересекающей отрезок BC в точке Q . Найдите площадь четырехугольника O_1PQO_2 , если $AC = 22$, $BC = 18$.

19. Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

а) Докажите, что AE параллельно BD .

б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.

20. К окружности с диаметром $AB = 6$ проведена касательная BC так, что $BC = 3\sqrt{2}$. Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D . Точка E диаметрально противоположна точке D . Прямые ED и BC пересекаются в точке F .

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE$.

б) Найдите площадь треугольника FBE .

21. Две окружности пересекаются в точках A и K так, что их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A .

а) Докажите, что углы AKC и AKB равны.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BK = 1$, $CK = 4$, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

22. В полуокружности с диаметром MN расположены две окружности с центрами O_1 и O_2 , касающиеся друг друга, полуокружности и прямой MN (при этом точки касания с полуокружностью — это соответственно A и B).

а) Докажите, что прямые O_1A , O_2B и MN пересекаются в одной точке.

б) Радиусы окружностей равны 2 и 5. Найдите радиус полуокружности.

23. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает ее в точке K , а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает ее в точке L .

а) Пусть AA_1 тоже диаметр окружности. Докажите, что углы DLK и A_1D_1D равны.

б) Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если $\angle ADB = 3\angle BDC$.

24. Окружность ω_1 касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC треугольника ABC за точки A и C соответственно, M — точка ее касания с прямой BC . Окружность ω_2 касается стороны AB и продолжений сторон AC и BC за точки A и B соответственно, N — точка ее касания с прямой BC .

а) Докажите, что $CM = BN$.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей ω_1 и ω_2 , если $AC = \sqrt{11}$, $AB = \sqrt{14}$, $BC = 5$.

25. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K .

- Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC .
- Найдите длину отрезка AK , если периметр треугольника ABC равен 30, а длина стороны BC равна 10.

26. В прямоугольнике $ABCD$, в котором $AD = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, а $AB = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K , радиус которой равен 2, касается сторон AB и AD . Окружность с центром в точке L , радиус которой равен 1, касается стороны CD и первой окружности.

- Докажите, что точки A , K и L лежат на одной прямой.
- Найдите площадь треугольника CLM , если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L .

27. Из вершины тупого угла C треугольника ABC проведена высота CH . Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а прямая CH — эту окружность в точке D .

- Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC .
- Найдите отношение MN к AB , если известно, что $CM : MA = 2 : 25$ и $CN : NB = 2 : 1$.

28. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AE$. Отрезок BE пересекает AC в точке M , а отрезок AD в точке N .

- Докажите, что точки C , D , M , N лежат на одной окружности.
- Точка O — центр описанной вокруг треугольника CMD окружности. Найдите радиус этой окружности, если $AO = 12$, $AB = 4$.

29. Точки A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон соответственно BC , AC и AB остроугольного треугольника ABC .

- Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1 , A_1BC_1 , и B_1AC_1 , пересекаются в одной точке.
- Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 , A_1BC_1 , и B_1AC_1 .

30. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена прямая, пересекающая вторично первую из окружностей в точке A , а вторую — в точке B . Через точку Q также проведена прямая, пересекающая вторично первую окружность в точке C , а вторую — в точке D .

- Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
- Найдите наибольшее возможное значение суммы длин отрезков AB и CD , если расстояние между центрами данных окружностей равно 1.

31. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

32. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Длина радиуса первой окружности равна 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна 64π .

- Докажите, что длины радиусов окружностей образуют геометрическую прогрессию.
- Найдите сумму длин второй и третьей окружностей.

33. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром в точке O касается стороны BC в точке K . Окружность с центром в точке O_1 касается стороны BC в точке L , а также касается продолжения сторон AC и AB .

а) Докажите, что $BL = CK$

б) Найдите расстояние OO_1 , если известно, что $AC = 7$, $BC = 24$ и $AB = 25$.

34. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M . В треугольники AMB , BMC , CMD и AMD вписаны окружности с центрами O_1 , O_2 , O_3 и O_4 соответственно.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ равна $\frac{O_1O_3 \cdot O_2O_4}{2}$.

б) Пусть прямая O_2O_4 пересекает стороны BC и AD в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $AQ : QD$, если известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, а отношение площадей треугольников CMP и BMP равно $3 : 2$.

35. Окружность касается одной из сторон прямого угла с вершиной D в точке E и пересекает вторую сторону в точках A и B (точка A лежит между B и D). В окружности проведён диаметр AC .

а) Докажите, что отрезок BC вдвое больше отрезка DE .

б) Найдите расстояние от точки E до прямой AC , если $AD = 4$ и $AB = 5$.

36. Две окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом. Из точки O_1 проведена касательная O_1K ко второй окружности (K — точка касания), а из точки O_2 проведена касательная O_2L к первой окружности (L — точка касания), точки K и L лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 .

а) Докажите, что $\angle O_1KL = \angle O_1O_2L$.

б) Найдите радиус меньшей окружности, если дополнительно известно, что он в 4 раза меньше радиуса большей окружности, а площадь четырехугольника O_1KO_2L равна $54 + 9\sqrt{6}$.

37. Окружности ω_1 и ω_2 радиусов 4 и 1 соответственно касаются внешним образом в точке A . Через точку B , лежащую на окружности ω_1 , проведена прямая, касающаяся окружности ω_2 в точке M .

а) Докажите, что отношение отрезков прямой AB , отсекаемых окружностями, равно отношению их радиусов.

б) Найдите BM , если известно, что $AB = 2$.

38. Две касательные к окружности, CA и CB , пересекаются в точке C (A и B — точки касания). Вторая окружность проходит через точку C , касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M , отличной от B .

а) Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCM , если $BC = 10$, а синусы углов BAM и ABM равны соответственно $0,6$ и $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

39. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B . Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC .

б) Найдите O_1O_2 , если известно, что радиусы окружностей равны 10 и 15, а $AC = 24$.

40. Дан угол величиной 120° с вершиной C . Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{3}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках A и B .

а) Докажите, что $OC = BC = CA$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

41. Радиусы двух окружностей с центрами O_1 и O_2 , касающихся внешним образом в точке A , равны 6 и 3 соответственно. Их общая секущая, проведенная через точку A , пересекает первую окружность в точке B , вторую — в точке C .

а) Докажите, что $AB : BC = AO_1 : O_1O_2$.

б) Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки B ко второй окружности, если $AB = 4$.

42. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите BC , если радиусы окружностей равны $\sqrt{7}$ и 3.

43. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку P проведена касательная к первой из этих окружностей, пересекающая вторую окружность в точке L , а через точку Q проведена касательная ко второй окружности, пересекающая первую окружность в точке M .

а) Докажите, что прямые PM и QL параллельны.

б) Найдите наименьшее возможное значение суммы длин отрезков PM и QL , если $PQ = 1$.

44. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$ и $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

45. Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

46. К двум окружностям радиусов 2 и 1 проведены внешние касательные AB и CD , причем точки A и C лежат на меньшей окружности, а точки B и D — на большей. Прямая AD пересекает меньшую окружность в точке N , а большую — в точке M .

а) Докажите, что $AN = DM$.

б) Найдите площадь треугольника ABD , если дополнительно известно, что точки M и N делят отрезок AD на три равные части.

47. Две окружности с центрами O_1 и O_2 равных радиусов касаются внешним образом и вписаны в острые углы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . Известно, что одна из окружностей касается гипотенузы AB в середине.

а) Докажите, что один из углов треугольника ABC равен 30° .

б) Окружность с центром O_1 касается катета AC в точке M , окружность с центром O_2 касается катета BC в точке N . Найдите площадь многоугольника $MCNO_2O_1$, если радиус окружностей равен 1.

48. Точка K лежит на отрезке MN . Прямая, проходящая через точку M , касается окружности с диаметром KN в точке A и пересекает окружность с диаметром MK в точках M и B . Продолжение отрезка AK пересекает окружность с диаметром MK в точке C .

а) Докажите, что прямые CM и AN параллельны.

б) Найдите площадь треугольника CKN , если $BM = 6$ и $AB = 30$.

49. Через точку C на окружности с центром O проведена касательная, пересекающая продолжение диаметра AD за точку D в точке S . Прямая, проходящая через середину хорды CD и точку S пересекает окружность в точках B и G ($GB < BS$), а отрезки AC , CO и CD — в точках T , E и F соответственно. Прямая BD пересекает отрезки AC и CO в точках K и P соответственно, причем BC параллельна AD .

а) Докажите, что $EK : AD = 1 : 6$.

б) Найдите площадь четырехугольника $KTEP$, если радиус окружности равен 4.

50. На окружности отмечены точки A, B, C и D так, что $AB = BD$, $\angle ABC = 90^\circ$.

а) Докажите, что $DM = BC$, если BM — диаметр окружности.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если радиус окружности равен 4, а точка пересечения диагоналей AC и BD делит AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины C .

51. В окружности с центром O проведен диаметр MN , отмечены точка K — середина дуги MN , точка A — середина хорды MK и точка B — середина дуги KN .

а) Докажите, что $AB : MN = \sqrt{3} : \sqrt{8}$.

б) На отрезке AB как на стороне построен прямоугольник $ABCD$ так, что его вершина C лежит на окружности. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности равен $3\sqrt{7}$.

52. В окружности радиусом R проведены хорды KL и MN , перпендикулярные друг другу и пересекающиеся в точке F .

а) Докажите, что при этих условиях выполняется равенство $KN^2 + ML^2 = 4R^2$.

б) Найдите радиус окружности R , если $KF = 3$, $FM = 8$, $FN = 6$.

53. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , пересекает окружность ω_1 в точке A , а окружность ω_2 — в точке B . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AB , пересекает ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно.

а) Пусть H_1 и H_2 — ортоцентры треугольников AQC и BQD соответственно. Докажите, что $H_1H_2 = 2O_1O_2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACDB$, если известно, что радиусы окружностей равны 13 и 15, расстояние между центрами окружностей равно 14, а прямая AB параллельна линии центров.