1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1.

а) Докажите, что расстояние между прямыми A_1D и CC_1 равно расстоянию между точкой A и плоскостью BCC_1.

б) Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

2. Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость CPT делит высоту MD треугольника AMB в отношении $1 : 2$, считая от точки M.

б) Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

3. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$.

а) Докажите, что $CT > BP$.

б) Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

5. В пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, $SA = SC = \sqrt{33}$, $SB = 7$. Точка O — основание высоты пирамиды, проведённой из вершины S.

а) Докажите, что точка O лежит вне треугольника ABC.

б) Найдите объём четырёхугольной пирамиды $SABCO$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BDA_1 делит объем параллелепипеда в отношении $1 : 5$.

б) Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$.

7. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

9. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 12 и высотой 3. Точка K — середина BC, точка L лежит на стороне A_1B_1 так, что $B_1L = 5$. Точка M — середина A_1C_1. Через точки K и L проведена плоскость таким образом, что она параллельна прямой AC.

а) Докажите, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB.

б) Найдите объем пирамиды с вершиной в точке B, у которой основанием является сечение призмы плоскостью.

10. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

11. В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

12. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.

б) Найдите объём B_1KLM.

13. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Точка M расположена на SD так, что $SM : SD = 2 : 3$. P — середина ребра AD, а Q — середина ребра BC.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MQP — равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MQP разбивает пирамиду.

15. Дана пирамида $PABCD$, в основании — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90°, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.

б) Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

16. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos\angle PBA = \dfrac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

17. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C = BD = 2$.

18. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA. Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что $AM = AD$.

б) Точка N — середина AM. Найдите SN, если $AD = 6$.

19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 5. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 5 : 1$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна SA.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α — прямоугольник.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро $SA = 14$, а сторона $AB = 8$. Точка M середина стороны AB Плоскость α проходит через точки M и D и перпендикулярна плоскости ABC. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что $MK = KD$.

б) Найдите объем пирамиды $MCDK$.

21. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

22. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, M — середина AB, N — середина CS.

а) Докажите, что проекции отрезков MN и AS на плоскость ABC равны.

б) Найдите объем пирамиды $SABC$, если $AS = 8$, $MN = 5$.

23. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. Точка M лежит на ребре BC, причем $BM = 1$, точка K лежит на ребре SC, причем $SK = 4$.

а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите объем пирамиды $CDKM$.

24. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 7$, а боковое ребро $SA = 10$. Точка M лежит на ребре BC, причем $BM = 4$, точка K лежит на ребре SC, причем $SK = 7$.

а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите объем пирамиды $CDKM$.

25. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ в которой $AB = 6$ и $AA_1 = 3$. Точки O и O_1 являются центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ сответственно. На ребре CC_1 отмечена точка M такая, что $CM = 1$.

а) Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM.

б) Найдите объем пирамиды $ABMC_1$.

26. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 8$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

27. Две боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, перпендикулярны к плоскости основания.

а) Докажите, что две другие боковые грани образуют равные двугранные углы с плоскостью основания.

б) Найдите объем пирамиды, если боковые грани, перпендикулярные к плоскости основания, образуют двугранный угол 120°, а боковая грань, составляющая с плоскостью основания угол в 30°, имеет площадь 36 см^2.

28. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$, точка K — середина AS. Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь $PQBC$ относится к площади BSC как 3 : 4.

б) Найдите объем пирамиды $KBQPC$.

29. Основанием прямой треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ является прямоугольный треугольник PQR с прямым углом R. Диагонали боковых граней PP_1Q_1Q и PP_1R_1R равны 17 и 15 соответственно, $PQ = 10$.

а) Докажите, что треугольник P_1QR прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды P_1QRR_1.

30. Дана треугольная пирамида $SABC$. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка CH — высоты треугольника ABC.

а) Докажите, что $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AB = 25,\ AC = 10,\ BC = 5\sqrt{13},\ SC = 3\sqrt{10}.$

31. Различные точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°.

а) Докажите, что $\cos\angle ASC + \cos\angle CSB = 1{,}5.$

б) Найдите объем тетраэдра $SABC$, если $SC = 1$ и $\cos\angle ASC = \dfrac{2}{3}.$

32. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90°, плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PDC.

б) Найдите объем $PKBC$, если $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 7.

33. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD.

а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.

б) Найдите объём пирамиды, если $HA = \sqrt{2}$ и $HC = 4$.

34. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона AB основания которой равна 32, а боковое ребро BB_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$, $B_1L = 28$. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна прямой AC.

а) Докажите, что плоскость γ перпендикулярна прямой MB.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка M, а основанием — сечение данной призмы плоскостью γ.

35. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ образует с основанием угол 45°, сторона основания равна 4. Через среднюю линию треугольника ABD, не пересекающую BD, и середину высоты пирамиды проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру SC.

б) Найдите объем пирамиды $SKLM$, где K, L и M — точки пересечения α соответственно с ребрами SB, SD и SC.

36. Точка M — середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, точка N лежит на стороне основания BC. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA.

а) Плоскость α пересекает ребро DS в точке L. Докажите, что $BN : NC = DL : LS$.

б) Пусть $BN : NC = 1 : 2$. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость α разбивает пирамиду.

37. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1.

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A.

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

38. На сфере α выбрали пять точек: A, B, C, D и S. Известно, что $AB = BC = CD = DA = 4$, $SA = SB = SC = SD = 7$.

а) Докажите, что многогранник $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида.

б) Найдите объём многогранника $SABCD$.

39. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. Точка M лежит на ребре BC, причем $BM = 1$, точка K лежит на ребре SC, причем $SK = 4$.

а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите объем пирамиды $CDKM$.

40. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ двугранный угол при основании равен $\operatorname{arctg} 3$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как $3 : \sqrt{13}$.

а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α.

б) Найдите объем пирамиды $MABK$, если объем пирамиды $MABC$ равен $52\sqrt{5}$.

41. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объем пирамиды $KBCPQ$.

42. Точка F — середина бокового ребра SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, точка M лежит на стороне основания AB. Плоскость β проходит через точки F и M параллельно боковому ребру SC.

а) Плоскость β пересекает ребро SD в точке K. Докажите, что $BM : MA = DK : KS$.

б) Пусть $BM : MA = 3 : 1$. Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость β разбивает пирамиду.

43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 2 : 3$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и B.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A_1, а основанием — сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

44. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ — квадрат, и $AK : KC = 3 : 7$.

а) Докажите, что $AB : CD = 3 : 7$.

б) Найдите объём пирамиды $CKLMN$, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 100.

45. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На боковых рёбрах SA, SC и SD отмечены точки K, L и M соответственно так, что $SK : KA = SL : LC = 2 : 1$ и $SM = MD$.

а) Докажите, что плоскость KML содержит точку B.

б) Найдите объём пирамиды $BAKMD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 18, а высота пирамиды $SABCD$ равна 7.

46. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD$, а основание AD вдвое больше основания BC. Точки P, T, M — середины ребер SB, BC, AB соответственно. Известно, что ребро SA перпендикулярно плоскости основания, $SA = AB$.

а) Докажите, что прямые PT и CD взаимно перпендикулярны.

б) Найдите объем пирамиды $DMPT$, если $AB = 4$.

47. В n-угольной пирамиде $SA_1A_2...A_n$ с вершиной S тангенс двугранного угла при каждом ребре основания равен 0,75.

а) Докажите, что площадь полной поверхности пирамиды относится к площади основания как 9 : 4.

б) Найдите объём пирамиды, если в основании лежит ромб, диагонали которого относятся как 2 : 3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 20.

48. Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 4 и перпендикулярны друг другу. Плоскость α перпендикулярна ребру CD и пересекает рёбра AB и CD в точках K и M соответственно, причём $CM : MD = 5 : 3$.

а) Докажите, что K — середина ребра AB.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α.

49. Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Ребро SA является высотой пирамиды. Точки E и F лежат на рёбрах AC и BS соответственно так, что $SF : FB = AE : EC = 1 : 5$. Плоскость α проходит через точки E и F перпендикулярно прямой AC и пересекает рёбра AB и CS в точках H и M соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольником.

б) Найдите объём многогранника $BCMEHF$, если объём пирамиды $SABC$ равен 216.

50. В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S на стороне основания AC и боковом ребре SB отметили соответственно точки E и N такие, что $AE : EC = SN : NB = 1 : 2$. Через точки E и N параллельно прямой AB провели плоскость α.

а) Докажите, что сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Плоскость α разделила пирамиду $SABC$ на два многогранника. Найдите объем того из них, в котором одной из вершин является точка A, если $AB = 6$, $AS = 3\sqrt{3}$.

51. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ является прямоугольником со сторонами 6 и 8, диагонали которого пересекаются в точке O. Плоскость, содержащая диагональ AC и параллельная прямой B_1D, пересекает ребро BB_1 в точке K. Угол между плоскостями ABC и ACK равен 45°.

а) Докажите, что угол KOB меньше 45°.

б) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

52. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах BB_1 и CC_1 отмечены точки M, N соответственно такие, что $BM : MB_1 = 2 : 5$, $BM : NC_1 = 2 : 3$.

а) Докажите, что BD параллельна плоскости AMN.

б) Найдите меньший из объёмов, на которые плоскость ABN делит объем призмы, если $AA_1 = 14$, $AD = 3$.

53. Плоскость α, содержащая диагональ BD грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, пересекает ребро B_1C_1 и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2 : 1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро B_1C_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины B_1.

б) В каком отношении плоскость α делит объем куба?

54. В треугольной пирамиде ребра AB, AC и AD взаимно перпендикулярны, причём $AB = AC$. Точки L, F, Q и T — середины ребер BD, DC, AC и AB соответственно. Известно, что плоскости DTQ и ALF перпендикулярны.

а) Докажите, что $AD : AB = 1 : 2$.

б) Пусть S и E — точки пересечения медиан треугольников ABD и ACD соответственно. Найдите объём многогранника $TLFQES$, если $AD = 3$.

55. Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрах CD, CC_1 и A_1B_1 отметили точки K, L и M соответственно. Известно, что $A_1M = MB_1$, $DK = 2KC$, а четырёхугольник $AKLM$ — равнобедренная трапеция.

а) Докажите, что $CL = 2LC_1$.

б) Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AA_1 = 7$.

56. На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $DABC$ отмечены точки M и N так, что $AM : MB = CN : NB = 1 : 3$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость PQM делит пирамиду.

57. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с его двумя гранями углы, равные α, а с третьей — угол, равный β.

а) Докажите, что $\sin^2\beta = \cos 2\alpha$.

б) Найдите объем параллелепипеда, если $d = 2\sqrt{2},\ \alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

58. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точки M и K — середины сторон SB и DC соответственно. Через центр основания пирамиды параллельно прямым AM и SK проведена плоскость α.

а) Докажите, что α делит ребро BC в отношении $1 : 5$, считая от точки C.

б) Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение пирамиды плоскостью α, а вершиной — точка A, если в пирамиде $SABCD$ сторона основания равна $8\sqrt{3}$, высота равна 12,