1. В трёх вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т. е. прыгают друг через друга. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли один из них попасть в четвёртую вершину квадрата?

2. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются "непохожими", если они различаются не менее, чем по 51 признаку.

а) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.

б) А может ли быть 50?

3. n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.

а) При каких n это возможно, если $m = 9$?

б) При каких n и m это возможно?

4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N-угольник, и из красных — тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N-угольник, и из красных — тоже?

Решите задачу

а) для $N = 3$;

б) для произвольного натурального $N > 3$.

5. а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Еще он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

б) А если сундуков было восемь, а скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках?

6. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает ¼ своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и наконец четвёртый гном ¼ оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2 л.

Сколько молока было первоначально в кружках, если

а) в конце у всех гномов молока оказалось поровну?

б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было в начале?

7. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов.

а) Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

б) Какое наименьшее число операций для этого потребуется?

8. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на четверть, четвертый — на одну пятую, пятый — на одну восьмую, шестой — на одну девятую, и седьмой — на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным

а) на одну двенадцатую;

б) на одну шестую?

9. Компьютер может производить одну операцию: брать среднее арифметическое двух целых чисел. Даны три числа: m, n и 0, причем m и n не имеют общих делителей и $m < n$ Докажите, что с помощью компьютера из них можно получить

а) единицу;

б) любое целое число от 1 до n.

10. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней

а) 5 человек?

б) 8 человек?

11. Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того, как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 часа 30 мин.

а) Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее, чем на 1 мин. 51 сек.

б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин.?

12. Лужков и Батурина поворачивают с Рублевки на МКАД в разные стороны — Лужков — налево, Батурина — направо. За сколько минут каждый из них проезжает полный круг по МКАД, если известно, что Лужков тратит на 12 минут меньше Батуриной, при этом проезжая круг не быстрее 31 минуты. Время проезда одного круга измеряется целым числом минут и их седьмая встреча произошла снова на Рублёвке.

13. Инспектор ДПС майор Худаков получил указание начальства останавливать те автомобили, трехзначный госномер которых n удовлетворяет следующим требованиям: если выписать все целые числа от 1 до n и посчитать количество записанных цифр, то получится число, записанное теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Сначала майор попробовал выполнять требуемые вычисления для каждого автомобиля в режиме реального времени мелом на асфальте, но мел скоро закончился. Помогите майору определить номера нужных автомобилей.

14. Губернатор Титькин решил организовать автобусное движение между деревнями Верхнее и Нижнее Гадюкино. Автобусы-экспрессы будут следовать из Нижнего Гадюкино в Верхнее без остановок круглосуточно с интервалом ровно 7 минут, останавливаться в конечном пункте на какое-то время и отправляться обратно, тратя на дорогу в одну сторону ровно 25 минут. При этом на конечных остановках не должно находиться более одного автобуса одновременно. Сколько автобусов потребуется купить губернатору?

15. В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике — 50 человек, по информатике — 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

16. а) На постоялом дворе остановился путешественник, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. Но при этом он поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: каждый день хозяин должен был иметь на одно кольцо больше, чем в предыдущий. Замкнутая в кольцо цепочка содержала 11 колец, а путешественник собирался прожить ровно 11 дней, поэтому он согласился. Какое наименьшее число колец он должен распилить, чтобы иметь возможность платить хозяину?

б) Из скольких колец должна состоять цепочка, чтобы путешественник мог прожить на постоялом дворе наибольшее число дней при условии, что он может распилить только n колец?

17. Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую).

а) необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;

б) необходимо подобрать 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две. (В обоих случаях докажите, что найденный Вами набор гирек обладает требуемыми свойствами.)

18. Автобусные билеты имеют номера от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме последних трех его цифр. Докажите, что:

а) число всех счастливых билетов четно;

б) сумма номеров всех счастливых билетов делится на 999.

19. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или по достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на 12!;

б) делится на 13!.

20. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистоли и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон — $1/s$ пистолей, где s — не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдает в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

а) Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистоли, а затем обменяв полученные пистоли на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было в начале?

б) Если да, то может ли случится, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

21. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на банках стали нечитаемыми, и только завхоз знает где что. Он может все это доказать (т. е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашках. Докажите, что ему для этой цели

а) достаточно четырех взвешиваний;

б) недостаточно трех взвешиваний.

Комментарий. Отметим еще раз, что завхоз должен обосновать, что в какой банке находится для всех 80 банок.

22. Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдется три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдется

а) 15 одноклассников;

б) 16 одноклассников?

23. Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить все жалование между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдает Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

а) жалование между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

б) жалование между отрядами Черномор распределяет поровну?

24. Четырехзначное число A содержит в своей десятичной записи попарно различные цифры, отличные от нуля. Число B записано теми же цифрами, но в обратном порядке. Известно, что $A > B$.

а) Найдите наибольшее значение выражения $A - B$.

б) Найдите наименьшее значение выражения $A - B$.

в) Найдите числа A и B, для которых значение выражения $\dfrac{A}{B}$ будет наименьшим.

25. В шахматном турнире участвовало 20 шахматистов, причём 6 из них — из России. Каждый шахматист сыграл по одной партии с каждым. За победу в партии шахматист получал 1 очко, за ничью — 0,5 очка, в случае проигрыша — 0 очков.

а) Могли ли все российские шахматисты набрать в сумме ровно 14 очков?

б) Могли ли все российские шахматисты набрать в сумме ровно 100 очков?

в) Известно, что первое место занял шахматист из России, а второе место — шахматист из другой страны. Какое наибольшее суммарное количество очков могли набрать российские шахматисты?

26. Подковывая лошадь, кузнец тратит на одну подкову 5 минут.

а) Смогут ли два кузнеца за полчаса подковать трёх лошадей?

б) Смогут ли четыре кузнеца за 15 минут подковать трёх лошадей?

в) За какое наименьшее время 48 кузнецов смогут подковать 60 лошадей? (Известно, что лошадь не может стоять на двух ногах, поэтому два кузнеца не могут одновременно работать с одной лошадью).

27. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

28. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

29. а) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

30. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлена обыкновенная дробь A, числитель и знаменатель которой — пятизначные числа (каждая цифра использовалась ровно один раз).

а) Какое наибольшее значение может принимать A?

б) Может ли значение A оказаться целым числом?

в) Найдите такое A, чтобы значение $|A - 1|$ было наименьшим.

31. У каждого учащегося в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, живет и кошка, собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учащихся, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учащихся, имеющих кошек.

а) Может ли в классе быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 учащийся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 учащийся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

32. В некотором царстве было несколько (более двух) княжеств. Однажды некоторые из этих княжеств объявили себя царствами и разделились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале. Затем всё новые и новые княжества из числа прежних и вновь образующихся объявляли себя царствами и делились каждое на то же самое число княжеств, которое было в самом начале.

а) Могло ли сразу после одного из делений общее число княжеств стать равным 102?

б) Могло ли в какой-то момент времени общее число княжеств стать равным 320, если известно, что сразу после одного из делений общее число княжеств было равно 162?

в) Сколько княжеств было в самом начале, если сразу после какого-то из делений общее число княжеств стало ровно в 38 раз больше первоначального?

33. На волшебной яблоне выросли 15 бананов и 20 апельсинов. Одновременно разрешается срывать один или два плода. Если сорвать один из плодов вырастет такой же, если сорвать сразу два одинаковых плода — вырастет апельсин, а если два разных — вырастет банан.

а) В каком порядке надо срывать плоды, чтобы на яблоне остался ровно один плод?

б) Можете ли вы определить, какой это будет плод?

в) Можно ли срывать плоды так, чтобы на яблоне ничего не осталось?

34. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой.

а) Может ли в каждой группе быть 33 студента?

б) Может ли число студентов, изучающих только английский язык во второй группе быть равно 2?

в) Каково минимально возможное количество студентов в каждой группе?

35. 16 учеников пишут контрольную работу, составленную в нескольких вариантах. Их рабочие места расположены в виде квадрата 4×4. Будем называть пару учеников «подозрительной», если они сидят на соседних (по вертикали, горизонтали или диагонали) местах и пишут один и тот же вариант. (Ученик может входить в несколько «подозрительных» пар).

а) Может ли не оказаться ни одной «подозрительной» пары, если имеется 4 варианта контрольной работы?

б) Может ли не оказаться ни одной «подозрительной» пары, если имеется 3 варианта контрольной работы?

в) Найдите наименьшее возможное количество «подозрительных» пар, если имеется 3 варианта контрольной работы.

36. Ваня играет в игру. В начале игры на доске написано два различных натуральных числа от 1 до 9999. За один ход игры Ваня должен решить квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p и q — взятые в выбранном Ваней порядке два числа, написанные к началу этого хода на доске, и, если это уравнение имеет два различных натуральных корня, заменить два числа на доске на эти корни. Если же это уравнение не имеет двух различных натуральных корней, Ваня не может сделать ход и игра прекращается.

а) Существуют ли такие два числа, начиная играть с которыми Ваня сможет сделать не менее двух ходов?

б) Существуют ли такие два числа, начиная играть с которыми Ваня сможет сделать десять ходов?

в) Какое наибольшее число ходов может сделать Ваня при этих условиях?

37. В магазине продаются мобильные телефоны, каждый из которых стоит целое число тысяч рублей (больше нуля, но менее 100 тыс.). Магазин установил скидки на несколько телефонов: если цена телефона составляет N тыс. руб., то он продаётся со скидкой N%.

а) Могла ли средняя величина скидки составить ровно 1 тыс. руб.?

б) Могла ли средняя величина скидки составить ровно 2 тыс. руб.?

в) Известно, что средняя величина скидки составила ровно 3 тыс. руб. Какое наименьшее количество телефонов могло продаваться со скидкой?

38. Имеется m одинаковых шоколадок, которые можно разделить поровну на n школьников. Каждую шоколадку разрешается разломить не более одного раза (необязательно на равные части).

а) Возможно ли требуемое при $m = 18$, $n = 27$?

б) Возможно ли требуемое при $m = 18$, $n = 28$?

в) При каких n требуемое возможно, если $m = 14$?

39. На полигоне расположены 300 узлов связи, некоторые из которых соединены проводами (провода прямые, один провод соединяет ровно 2 узла, между любыми двумя узлами проходит не более одного провода). Система узлов связна, то есть из любого узла можно передать сигнал в любой другой (возможно, через промежуточные узлы). Будем называть узел значимым, если его ликвидация приводит к тому, что система оставшихся узлов перестает быть связной. При ликвидации узла все провода, которые вели непосредственно к нему, перестают функционировать.

а) Может ли в системе быть ровно 2 значимых узла?

б) Может ли каждый значимый узел быть соединен только с незначимым?

в) Какое наибольшее количество узлов могут быть значимыми?

40. На лужайке по кругу расположен 2431 цветок, каждый из которых является вершиной правильного многоугольника. Пчела летает по кругу против часовой стрелки, за один раз перемещаясь на n цветов (первые попавшиеся ($n - 1$) цветов она пропускает, а на n-й садится). При этом $0 < n < 1000$.

а) На скольких различных цветах может побывать пчела, если $n = 2$?

б) Существует ли такое допустимое значение n, при котором пчела имеет возможность побывать ровно на 26 цветах?

в) Найдите наименьшее возможное число различных цветов, на которых может побывать пчела, совершив 100 000 перелетов.

41. В пакете 28 конфет, 24 из них в серебристой упаковке, а остальные — в золотистой.

а) Конфеты случайным образом раскладывают в две коробки — по 14 штук в каждую. Какова вероятность того, что в каждой из коробок окажется по две конфеты в золотистой упаковке?

б) Конфеты случайным образом раскладывают в две коробки — по 14 штук в каждую. Какова вероятность того, что в одной из коробок не будет ни одной конфеты в золотистой упаковке?

в) К имеющимся конфетам добавили еще по равному количеству конфет в золотистой и серебристой упаковках. Потом две конфеты убрали, выбрав их наугад. Может ли вероятность того, что эти две конфеты в одинаковой упаковке, в целое число раз отличаться от вероятности того, что эти две конфеты в разных упаковках?

42. Все 36 учеников 11-го класса два раза писали тест, который может быть оценён в любое целое количество баллов от 0 до 100 включительно. Нецелое число баллов за тест никто получить не может. В результате каждого из двух тестирований средний балл всего класса, средний балл всех учеников, получивших менее 39 баллов, и средний балл всех учеников, получивших не менее 39 баллов, оказались целыми числами. При первом тестировании ровно трое учеников получили за тест менее 39 баллов каждый.

а) Найдите максимально возможный средний балл M всего класса по итогам первого тестирования. Какой при этом средний балл трёх учеников, показавших худшие результаты?

б) Найдите минимально возможный средний балл всего класса по итогам первого тестирования. Какой при этом средний балл трёх учеников, показавших худшие результаты?

в) По итогам второго тестирования средний балл всего класса оказался равен $M + 1$. Найдите при этом условии количество N учеников, набравших не менее 39 баллов. Какой при этом средний балл у этих N учеников?

43. Изобретатель-самоучка Акакий Шестеренкин взял у сурового ростовщика Порфирия Кровопийцева кредит на S рублей на срок n месяцев. Условия Порфирия безжалостны:

— каждый месяц долг Акакия возрастает на 50% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— после этого Акакий приносит платеж (строго в целых рублях, сдачи Порфирий не дает);

— долг должен погашаться дифференцированно: каждый месяц после платежа остаток долга должен быть на одну и ту же величину $\frac{S}{n}$ меньше долга на конец предыдущего месяца.

Известно, что ни в один из месяцев Акакию не пришлось делить рубли на копейки (все ежемесячные платежи — целые числа). Пусть M — общая сумма рублей, выплаченная за n месяцев.

а) Могло ли оказаться так, что общая сумма выплат M ровно в 2 раза превысила размер займа S?

б) Акакий подсчитал, что число M является простым. Возможно ли это при $n > 1$?

в) Найдите все возможные значения суммы займа S, если известно, что срок кредита $n > 2$, разность между первым и вторым платежом составила ровно 1 рубль, а общая сумма выплат M в точности равна квадрату некоторого простого числа.