1. a_1, a_2, a_3, ... – возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k} = 3k$ для любого k. Найти:

а) a_{100};

б) a_{1983}.

2. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006 , но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k. При каком наименьшем k такое возможно?

3. Дана бесконечная последовательность чисел $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_k, \ldots (k \in \mathbb{N})$, в которой при каждом k член последовательности x_k является корнем уравнения $x^2 - 2 \cdot 3^k \cdot x + 9^k = 0.$

1. Найдите наибольший порядковый номер k члена последовательности такой, что в десятичной записи числа x используется не более семи цифр.
2. Укажите наименьшее натуральное число N, среди делителей которого содержится ровно 8 членов данной последовательности.
3. Существует ли такое натуральное число n, что сумма n идущих подряд членов этой последовательности равна некоторому члену этой последовательности.
4. Существует ли набор из 2012 членов данной последовательности таких, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом.

4. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ... число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечётный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности

а) число 1 встречается бесконечно много раз;

б) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

5. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите:

а) наименьшее такое число,

б) все такие числа.

6. Последовательность задана формулой $a_n = 5b + 3n$, где $n, b \in \mathbb{N}$.

а) Может ли число 15 являться членом последовательности?

б) Верно ли, что данная последовательность является бесконечной арифметической прогрессией?

в) Может ли последовательность являться геометрической прогрессией?

г) Могут ли три подряд идущих члена последовательности являться сторонами прямоугольного треугольника?

7. Дан прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.

а) Могут ли стороны данного треугольника быть членами возрастающей геометрической прогрессии?

б) Докажите, что для любого натурального n можно найти такие три числа, которые будут являться сторонами этого треугольника и членами арифметической прогрессии с разностью n.

8. Несколько натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию, начиная с четного числа. Сумма нечетных членов прогрессии равна 33, четных — 44. Найдите эти числа.

9. Дана бесконечная последовательность чисел, в которой первый член равен 1, а каждый последующий в два раза меньше предыдущего.

а) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{7}$?

б) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{5}$?

10. Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, … выбрать (сохраняя порядок)

а) сто чисел,

б) бесконечную последовательность чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих $(a_k = a_{k-2} - a_{k-1})$?

11. В возрастающей арифметической прогрессии $\{a_n\}$ сумма цифр членов тоже образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Может ли в прогрессии $\{a_n\}$ быть:

а) 11 членов;

б) бесконечное число членов?

12. В ряд выписаны в порядке возрастания числа, делящиеся на 9: 9, 18, 27, 36, …. Под каждым числом этого ряда записана сумма его цифр.

а) На каком месте во втором ряду впервые встретится число 81?

б) Что встретится раньше: четыре раза подряд число 27 или один раз число 36?

13. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n > 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

14. Имеется арифметическая прогрессия, состоящая из пятидесяти чисел.

а) Может ли эта прогрессия содержать ровно 6 целых чисел?

б) Может ли эта прогрессия содержать ровно 29 целых чисел?

в) Найдите наименьшее число n, при котором эта прогрессия не может содержать ровно n целых чисел.

15. Числовая последовательность задана формулой общего члена: $a_n < \frac{1}{n^2 + n}$.

а) Найдите наименьшее значение n, при котором $a_n < \frac{1}{2017}$.

б) Найдите наименьшее значение n, при котором сумма n первых членов этой последовательности будет больше, чем 0,99.

в) Существуют ли в данной последовательности члены, которые образуют арифметическую прогрессию?

16. Даны $n(n \geqslant 3)$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех данных чисел равняться 22?

б) Может ли сумма всех данных чисел равняться 23?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 48.

17. Бесконечная геометрическая прогрессия $b_1,\ b_2,...,b_n,...$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть

Пусть $S_1\ =\ b_1$ и $S_n\ =\ b_1+b_2+...+b_n$ при всех натуральных $n\geqslant 2.$

а) Приведите пример такой прогрессии, для которой среди чисел S_1, S_2, S_3, S_4 ровно два числа делятся на 24.

б) Существует ли такая прогрессия, для которой среди чисел S_1, S_2, S_3, S_4 ровно три числа делятся на 24.

в) Какое наибольшее количество чисел среди $S_1, S_2,..., S_8$ может делиться на 24, если известно, что S_1 на 24 не делится?

18. На доске написан упорядоченный набор из семи различных натуральных чисел. Среднее арифметическое первых четырех и среднее арифметическое последних четырех чисел равно 12.

а) Может ли среднее арифметическое всех чисел равняться 12?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел равняться 8?

в) Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать среднее арифметическое всех чисел.

19. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

20. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 2800, и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

21. Конечная последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n$ состоит из $n\geqslant 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k\leqslant n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1.$

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=3.$

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3=a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

22. В последовательности натуральных чисел $a_1=47$, каждый следующий член равен произведению суммы цифр предыдущего члена и a_1.

а) Найдите пятый член последовательности.

б) Найдите 50-й член последовательности.

в) Вычислите сумму первых пятидесяти членов этой последовательности.

23. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_7$ ровно три числа делятся на 24?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{30}$ ровно 9 чисел делятся на 24?

в) Для какого наибольшего натурального числа n могло оказаться так, что среди чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{3n}$ больше кратных 24, чем среди чисел $a_{3n+1},\ a_{3n+2},\ \ldots,\ a_{7n}$, если известно, что разность прогрессии равна 1?

24. В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:

а) набор цифр 1234; 3269;

б) вторично набор 1975;

в) набор 8197?

25. Для членов последовательности целых чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10}$ при всех натуральных $k \leqslant 8$ выполняется неравенство $a_k + a_{k+2} > 2a_{k+1}$.

а) Может ли в такой последовательности выполняться равенство $a_{10} = 0$?

б) Может ли в такой последовательности выполняться равенство $a_1 + a_{10} = 2a_7$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $a_1 - a_5 - a_6 + a_{10}$?

26. Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что ее второй член в 8 раз больше первого.

а) Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого ее члена в 567 раз?

б) Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1, если известно, что отношение является целым числом, и укажите любую пару таких ее членов.

в) Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из ее членов равен 546.

27. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a,\ S_n = a_1 + a_2 +\ \ldots\ + a_n$ при всех натуральных $n \geqslant 2.$

а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?

б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

28. Три двузначных натуральных числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию. При этом если в каждом из них поменять местами цифры десятков и единиц, то получатся числа y_1, y_2, y_3, которые также образуют арифметическую прогрессию.

а) Приведите пример такой прогрессии.

б) Чему равна наибольшая разность такой прогрессии?

в) Сколько существует таких прогрессий?

29. Бесконечная последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом. Возьмем любое натуральное число a и пусть $a_1 = a$. Для всех $n > 1$ если a_n делится на n, то $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$, а если a_{n-1} не делится на n, то $a_n = a_{n-1} \cdot n$. Например, если $a = 1$, то последовательность такая: 1, 2, 6, 24, 120, 20, 140, 1120, 10 080, 1008, ...

а) Может ли при каком-то начальном значении $a_1 = a$ в последовательности на восьмом месте оказаться число 17?

б) Может ли последовательность $\{a_n\}$ начиная с некоторого номера n, только возрастать?

в) Может ли первый элемент a_1 появиться в последовательности еще раз?