

1. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4.
- Докажите, что сечение является равнобедренным остроугольным треугольником.
 - Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
2. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6.
- Докажите, что сечение — равнобедренный остроугольный треугольник.
 - Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
3. Основанием пирамиды является трапеция с основаниями 25 и 7 и острым углом $\arccos 0,6$. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом 60° .
- Докажите, что существует точка M , одинаково удаленная от всех вершин пирамиды (центр описанной сферы).
 - Найдите объем данной пирамиды.
4. Шар касается основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ в точке B и ее бокового ребра SA .
- Докажите, что центр шара лежит в плоскости, перпендикулярной ребру AC , и проходящей через его середину.
 - Найдите радиус шара, если сторона основания пирамиды равна 3, а боковое ребро равно 4.
5. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.
- Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.
 - Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.
6. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 5.
- Докажите, что сечение конуса плоскостью ABP — равнобедренный остроугольный треугольник.
 - Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .
7. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84.
- Докажите, что сечение шара второй плоскостью является кругом.
 - Найдите радиус шара.
8. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 18 и 8. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 60° .
- Докажите, что существует точка O (центр вписанной сферы), одинаково удаленная от всех граней пирамиды.
 - Найдите площадь полной поверхности данной пирамиды.
9. Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.
- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
 - Найдите площадь сечения.
10. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.
- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.
 - Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

11. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

- Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.
- Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

12. Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60° .

- Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
- Найдите длину той части отрезка BD , которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.

13. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A , B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

- Точка N — середина отрезка AC . Докажите, что угол MNB прямой.
- Найдите угол между прямыми AM и SB , если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

14. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

- Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .
- Найдите объём цилиндра.

15. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

16. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

- Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- Найдите объём цилиндра.

17. В цилиндре на окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а AC_1 пересекает его ось цилиндра.

- Докажите, что угол $C_1BA = 90^\circ$.
- Найдите площадь боковой поверхности, если $AB = 16$, $BB_1 = 5$, $B_1C_1 = 12$.

18. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 20$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 21$.

19. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 4\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми BC и AC_1 равен 60° .
- б) Найдите расстояние от точки B до AC_1 .

20. В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B — концы образующих, M — середина SA , N — точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB .

- а) Докажите что $\angle ANO$ — прямой угол.
- б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно что $AB = 10$.

21. Точки A , B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S , причем A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC .

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC .

- б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC , если $AB = 6$, $BC = 8$ и $AS = 5\sqrt{2}$.

22. Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причём прямая MN параллельна образующей конуса SB .

- а) Докажите что $\angle ANO$ — прямой.
- б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$.

23. Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.
- б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

24. Основание ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина S расположена на оси O_1O_2 цилиндра (точка O_1 — центр верхнего основания, точка O_2 — центр нижнего основания). Объем цилиндра равен 21π , а объем пирамиды $3\sqrt{3}$.

- а) Докажите, что $SO_1 : SO_2 = 3 : 4$.
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB , если радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{3}$.

25. Радиус основания конуса равен 12, а высота равна 5.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.

- б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

26. Шар проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба.

- а) Докажите, что сфера касается ребер в их серединах.
- б) Найдите объем шара, если ребро куба равно 1.

27. Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $6\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.
- б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

28. Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $1 : 3$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $4 : 1$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5 .

29. Радиус основания конуса с вершиной S равен 8 , а высота конуса SO равна $\sqrt{88}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки B и N лежат в плоскости основания конуса так, что отрезок SB — образующая конуса, а прямая MN параллельна SB .

а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости SON .

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 10$.

30. Диаметр основания цилиндра равен 26 , образующая цилиндра равна 21 . Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 24 и 10 . Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра.

а) Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как $5 : 12$.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

31. На отрезке O_1O_2 , соединяющем центры оснований кругового цилиндра, отмечены точки P и F так, что $O_1P : PF : FO_2 = 1 : 4 : 7$. В цилиндре расположены два конуса: первый с вершиной F , основанием которого является круг основания с центром O_1 , второй — с вершиной P , основанием которого является круг основания с центром O_2 .

а) Докажите, что боковые поверхности этих конусов пересекаются по окружности, радиус которой в 4 раза меньше радиуса основания цилиндра.

б) Найдите объем общей части этих конусов, если высота цилиндра равна 10 , а радиус основания цилиндра равен 3 .

32. Перпендикулярные и равные ребра AD и BC тетраэдра $ABCD$ являются диаметрами двух оснований цилиндра, длина образующей которого равна длине ребра BC .

а) Докажите, что осевое сечение цилиндра, проходящее через BC , делит высоту тетраэдра $ABCD$, опущенную на грань ABC , в отношении $5 : 3$, считая от вершины D .

б) Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади полной поверхности тетраэдра.

33. Через вершину S конуса проведена плоскость, которая пересекает основание в точках A и B . Высота конуса SO равна $4\sqrt{3}$, дуга AB равна 90° , а хорда AB равна 8 .

а) Докажите, что угол между плоскостью SAB и плоскостью основания конуса равен 60° .

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

34. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки K и M по одну сторону от диаметра основания AB так, что плоскости ASK и BSM наклонены к плоскости основания конуса под углами $\arctg \sqrt{2}$ и $\arctg \sqrt{3}$, причем точка M принадлежит дуге BK , не содержащей точку A .

Тангенс угла наклона образующей конуса к плоскости основания равен $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

а) Докажите, что плоскость KMS наклонена к плоскости основания конуса под углом 60° .

б) Найдите площадь треугольника SKM , если радиус основания конуса равен 2 .

35. Дан цилиндр, осевым сечением которого является прямоугольник, с центрами нижнего и верхнего оснований в точках O и O_1 соответственно. Плоскость α проходит через диаметр AB нижнего основания и имеет с верхним основанием ровно одну общую точку K .

а) Докажите, что проекция точки K на плоскость нижнего основания лежит на прямой, проходящей через точку O перпендикулярно AB .

б) Найдите расстояние от центра верхнего основания (точки O_1) до плоскости α , если радиус основания цилиндра равен 15 , а высота цилиндра равна 20 .

36. Точки A , B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S . Точка M — середина хорды BC , AC — диаметр.

а) Докажите, что угол между прямой SM и плоскостью ABC равен углу между прямой AB и плоскостью SBC .

б) Найдите высоту конуса, если угол между прямой AB и плоскостью SBC равен 60° , $AC = 10$, $BC = 6$.