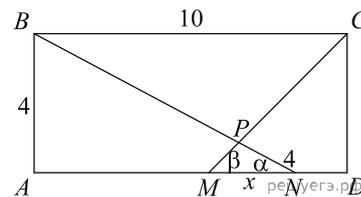
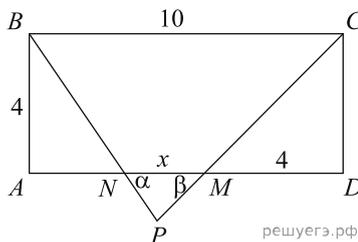


1. На стороне  $CD$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $CPD$ . Найдите высоту треугольника  $ADP$ , проведённую из вершины  $D$ , если известно, что сторона квадрата равна 1.
2. Прямая, проведённая через середину  $N$  стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ , пересекает прямые  $CD$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $T$  соответственно и образует с прямой  $AB$  угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника  $BMT$ , если сторона квадрата  $ABCD$  равна 8.
3. В прямоугольнике  $ABCD$   $AB = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ . Точка  $E$  на прямой  $AB$  выбрана так, что  $\angle AED = \angle DEC$ . Найдите  $AE$ .
4. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана в окружность с центром  $O$ . Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и  $\sin \angle AOB = \frac{3}{5}$ .
5. Через середину стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая прямые  $CD$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $T$  соответственно и образующая с прямой  $AB$  угол  $\alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ . Найдите площадь треугольника  $BMT$ , если сторона квадрата  $ABCD$  равна 4.
6. Дана трапеция  $ABCD$ , основания которой  $BC = 44$ ,  $AD = 100$ ,  $AB = CD = 35$ . Окружность, касающаяся прямых  $AD$  и  $AC$ , касается стороны  $CD$  в точке  $K$ . Найдите длину отрезка  $CK$ .
7. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  выбрана точка  $D$  так, что  $BD : DC = 1 : 2$ . Медиана  $CE$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $F$ . Какую часть площади треугольника  $ABC$  составляет площадь треугольника  $AEF$ ?
8. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $CE$ . Найдите длину отрезка  $DE$ , если  $AC = 6$ ,  $AE = 2$ ,  $CD = 3$ .
9. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 560. Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь треугольника  $MON$ , если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.
10. Прямая, проведённая через середину  $N$  стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ , пересекает прямые  $CD$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $T$  соответственно и образует с прямой  $AB$  угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника  $BMT$ , если сторона квадрата  $ABCD$  равна 8.
11. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 34$ ,  $AC = 65$  и  $BC = 93$ . На стороне  $BC$  взята точка  $M$ , причём  $AM = 20$ . Найдите площадь треугольника  $AMB$ .
12. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 240. Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь треугольника  $MON$ , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.
13. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 60, а одно из оснований трапеции втрое больше другого. Диагонали пересекаются в точке  $O$ ; отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите площадь четырёхугольника  $OMPN$ .
14. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 17$ ,  $AC = 10$  и  $BC = 9$ . На прямой  $BC$  взята точка  $M$ , причём  $AM = 10$ . Найдите площадь треугольника  $AMB$ .
15. На стороне  $CD$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $CPD$ . Найдите высоту треугольника  $ABP$ , проведённую из вершины  $A$ , если известно, что сторона квадрата равна 1.
16. Дан треугольник  $ABC$ , площадь которого равна 55. Точка  $E$  на прямой  $AC$  выбрана так, что треугольник  $ABE$  — равнобедренный с основанием  $AE$  и высотой  $BD$ . Найдите площадь треугольника  $ABE$ , если известно, что  $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

17. Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $E$  на прямой  $AC$  выбрана так, что треугольник  $ABE$ , площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием  $AE$  и высотой  $BD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$ .

18. В прямоугольнике  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 10$  на стороне  $AD$  расположены точки  $M$  и  $N$  таким образом, что  $DM = 4$ , при этом  $P$  — точка пересечения прямых  $BN$  и  $CM$ . Площадь треугольника  $MNP$  равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки  $M$  и  $N$ .



19. В параллелограмме  $ABCD$  биссектрисы углов при стороне  $AD$  делят сторону  $BC$  точками  $M$  и  $N$  так, что  $BM : MN = 1 : 2$ . Найдите  $BC$  если  $AB = 12$ .

20. Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен  $\frac{15}{17}$ . Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

21. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 810. Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь треугольника  $MON$ , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

22. На прямой, содержащей медиану  $AD$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$ , взята точка  $E$ , удаленная от вершины  $A$  на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника  $BCE$ , если  $BC = 6$ ,  $AC = 4$ .

23. Расстояния от точки  $M$ , расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 3 и 6. Через точку  $M$  проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 48. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри угла.

24. Из вершин острых углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведены две его высоты —  $BM$  и  $CN$ , причем прямые  $BM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $H$ . Найдите угол  $BHC$ , если известно, что  $MN = \frac{1}{3}BC$ .

25. Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ .

Известно, что  $AC = 3MB$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан  $AA_1$  и  $CC_1$ , если известно, что  $AC = 12$ .

26. Биссектриса острого угла  $A$  трапеции  $ABCD$  пересекает боковую сторону  $CD$  в точке  $T$ , а продолжение основания  $BC$  трапеции в точке  $K$  так, что  $ABKD$  — параллелограмм и  $TD : TC = 4 : 1$ .

а) Докажите, что прямые  $AK$  и  $BD$  перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции  $ABCD$ , если ее сторона  $AB = 8$  и  $\angle B = 120^\circ$ .

27. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены биссектриса  $AD$  и медиана  $BE$ . Точки  $M$  и  $N$  являются ортогональными проекциями на сторону  $AB$  точек  $D$  и  $E$  соответственно, причем

$$\frac{AM}{MB} = \frac{9}{1}; \quad \frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}.$$

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

б) Найдите отношение  $\frac{AD^2}{BE^2}$ .

**28.** В трапеции  $ABCD$  с нижним основанием  $AD$  площади треугольников  $ABD$  и  $BDC$  равны соответственно 12 и 4, а точка  $G$  является серединой  $BD$ . Ниже прямой  $AD$  выбрана точка  $E$ ,  $AE = BD$ , а на отрезке  $EC$  выбрана точка  $F$  такая, что  $CF$  в 4 раза короче  $CE$ .

а) Докажите, что угол  $BFG$  равен  $90^\circ$ .

б) Найдите длину отрезка  $BD$ , если дополнительно известно, что  $\angle CFG = 75^\circ$ , а  $\angle BGC = 15^\circ$ .

**29.** Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Известно, что площадь каждого из треугольников  $ABE$  и  $DCE$  равна 1.

а) Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм или трапеция.

б) Найдите  $BC$ , если площадь всего четырехугольника не превосходит 4, а  $AD = 3$ .

**30.** Биссектрисы углов  $C$  и  $D$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ . Диагональ  $BD$  разбивает отрезок  $KC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $C$ . При этом площадь треугольника  $ACD$  в два раза больше площади треугольника  $AKD$ .

а) Докажите, что угол  $CKD$  прямой.

б) Найдите  $BK$ , если  $BC = 6$ .

**31.** На отрезке  $BD$  взята точка  $C$ . Биссектриса  $BL$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  является боковой стороной равнобедренного треугольника  $BLD$  с основанием  $BD$ .

а) Докажите, что треугольник  $DCL$  равнобедренный.

б) Известно, что  $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$ . В каком отношении прямая  $DL$  делит сторону  $AB$ ?

**32.** В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  заданы соответственно точки  $M$  и  $N$  такие, что  $AM = MB$ ,  $BN : NC = 1 : 2$ . Отрезки  $CM$  и  $AN$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что расстояние от точки  $O$  до прямой  $AC$  равно  $\frac{2}{5}BH$ , где  $BH$  высота треугольника  $ABC$ .

б) Найдите расстояние от точки  $O$  до прямой  $AC$ , если  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ ,  $AC = 8$ .

**33.** В треугольнике  $ABC$  проведены  $BK$  — медиана,  $BE$  — биссектриса,  $AD$  — высота. Известно, что прямые  $BK$  и  $BE$  делят отрезок  $AD$  на три равные части.

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  — тупоугольный.

б) Найти длину стороны  $AC$ , если  $AB = 4$ .