1. В треугольнике ABC, $AB = 15$, $BC = 7$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 5 : 7$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

2. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

3. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB.

6. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 25$, $AC = 7$ и $BC = 24$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причем $CD = 8$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

7. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13, $\cos\angle BAC = -\frac{5}{13}$, высота, проведённая к стороне BC, равна 5. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC.

8. Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведённых из вершин A и C соответсвенно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC, если известно, что: а) треугольник остроугольный, б) угол B тупой.

9. В треугольнике ABC, $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 4$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 1 : 5$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

10. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

11. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

12. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

13. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

14. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

15. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен $\frac{3}{5}$.

16. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно $\frac{7}{24}$.

17. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\frac{15}{8}$.

18. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

19. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

20. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

21. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

22. Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

23. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

24. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 7. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников BOD, DOF и BOF.

25. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, в котором $AC = 10{,}5$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF.

26. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 4$, $AF = 2$, $\angle BAC = 60°$.

27. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 6$, $AF = 3$, угол BAC равен 45°.

28. Угол C треугольника ABC равен 60°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 3$. Найдите угол A.

29. Угол C треугольника ABC равен 60°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 2 : 3$. Найдите угол A.

30. Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

31. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

32. Стороны KM и MN треугольника KMN равны соответственно 30 и 25, а его высота MH равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники KMH и MNH.

33. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух его сторон.

34. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 15$, $AC = 9$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причем $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

35. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

36. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся прямой BC.

37. Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB.

38. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается сторон KL, LM и MK в точках A, B и C соответственно.

а) Докажите, что $KC = \dfrac{KL + KM - LM}{2}$.

б) Найдите отношение $BL : BM$, если известно, что $KC : CM = 3 : 2$ и $\angle MKL = 60^\circ$.

39. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках K, M и N соответственно.

а) Докажите, что $AN = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

б) Найдите отношение $AK : KB$, если известно, что $AN : NC = 4 : 3$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

40. Из середины катета прямоугольного треугольника на его гипотенузу опущен перпендикуляр, длина которого равна 1. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если длина одного из его катетов равна 4.

41. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BA и BC в точках E и F.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник BEF, лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $AB = BC$, $BE = 13$, $EF = 10$.

42. В треугольнике ABC $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, BD — диаметр описанной около треугольника ABC окружности. Продолжение высоты BH пересекает окружность в точке L.

а) Докажите, что $\angle ACD = \angle CAL$.

б) Найдите длину отрезка DL, если радиус описанной окружности равен $4\sqrt{3}$.

43. Точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Луч BI пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N. Известно, что угол ABC равен 60°.

а) Докажите, что N — центр окружности, описанной около треугольника AIC.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $IN = 1$.

44. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D, а описанную вокруг треугольника ABC окружность — в точке T.

а) Докажите, что AC — биссектриса угла TCB.

б) Найдите CD, если $AB = 84$, $AC = 98$.

45. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 2\sqrt{2}$.

46. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M, причем $\angle BAM = 30^\circ$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке N, отличной от A. Известно, что $\angle BNC = 105^\circ$, $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{6}$.

а) Доказать, что $BN : NC = 1 : \sqrt{2}$.

б) Найдите длину отрезка AN.