

1. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона  $AB$  касается окружности,  $CD$  является хордой, а стороны  $DA$  и  $BC$  пересекают окружность в точках  $P$  и  $Q$  соответственно.
- Докажите, что около четырёхугольника  $ABQP$  можно описать окружность.
  - Найдите длину отрезка  $DQ$ , если известно, что  $AP = a$ ,  $BC = b$ ,  $BQ = c$ .
2. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  известны стороны и диагональ:  $AB = 3$ ,  $BC = CD = 5$ ,  $AD = 8$ ,  $AC = 7$ .
- Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.
  - Найдите  $BD$ .
3. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность, причем сторона  $CD$  — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра  $AH$  к диагонали  $BD$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $E$ , а окружность — в точке  $F$ , причем  $H$  — середина  $AE$ .
- Докажите, что четырёхугольник  $BCFE$  — параллелограмм.
  - Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если известно, что  $AB = 3$  и  $AH = 2\sqrt{2}$ .
4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Диаметр  $CC_1$  перпендикулярен стороне  $AD$  и пересекает её в точке  $M$ , а диаметр  $DD_1$  перпендикулярен стороне  $AB$  и пересекает её в точке  $N$ .
- Пусть  $AA_1$  также диаметр окружности. Докажите, что  $\angle DNM = \angle BA_1D_1$ .
  - Найдите углы четырёхугольника  $ABCD$ , если  $CDB$  вдвое меньше угла  $ADB$ .
5. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиусом 10. Известно, что  $AB = BC = CD = 6$ .
- Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.
  - Найдите  $AD$ .
6. Хорды  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $T$ . На хорде  $BC$  отложен отрезок  $CP$ , равный  $AD$ . Точки  $P$  и  $D$  равноудалены от хорды  $AC$ , а отрезок  $TP$  перпендикулярен хорде  $BC$ .
- Докажите, что площади четырёхугольников  $ABPD$  и  $APCD$  равны.
  - Найдите эти площади, если площадь треугольника  $ATD$  равна трем.
7. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса  $R = 27$ . Известно, что  $AB = BC = CD = 36$ .
- Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.
  - Найдите  $AD$ .
8. Дана окружность с центром в точке  $O$  и радиусом 5. Точка  $K$  делит диаметр  $AD$  в отношении  $1 : 4$ , считая от точки  $D$ . Через точку  $K$  проведена хорда  $BC$  перпендикулярно диаметру  $AD$ . На меньшей дуге  $AB$  окружности взята точка  $M$ .
- Докажите, что  $BM \cdot CM < BA^2$ .
  - Найдите площадь четырёхугольника  $ACBM$ , если дополнительно известно, что площадь треугольника  $BCM$  равна 24.
9. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Точка  $F$  лежит на его стороне  $AD$ , причём прямые  $BF$  и  $CD$  параллельны, и прямые  $CF$  и  $AB$  параллельны.
- Докажите, что отрезки  $BF$  и  $CF$  разбивают четырёхугольник  $ABCD$  на три подобных треугольника.
  - Известно, что  $AF = 1$ ,  $DF = 4$ . Найдите  $BC$ .
10. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BAD$  и пересекается с диагональю  $BD$  в точке  $E$ . Известно, что около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность.
- Докажите, что  $AE \cdot AC = AD \cdot AB$ .
  - Найдите  $AE$ , если известно, что  $BC = 7$ ,  $CE = 4$ .
11. На стороне острого угла с вершиной  $A$  отмечена точка  $B$ . Из точки  $B$  на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры  $BC$  и  $BD$  соответственно.
- Докажите, что  $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$ .
  - Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $T$ . Найдите отношение  $AT : TC$ , если  $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$ .
12. Четырёхугольник  $ABCD$  с перпендикулярными диагоналями  $AC$  и  $BD$  вписан в окружность.
- Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника перпендикулярно стороне  $BC$ , делит пополам сторону  $AD$ .
  - Найдите стороны четырёхугольника  $ABCD$ , если известно, что  $AC = 84$  и  $BD = 77$ , а диаметр окружности равен 85.
13. В треугольнике  $ABC$  известны стороны  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  и  $BC = \sqrt{61}$ . На его стороне  $BC$  вне треугольника (точки  $A$  и  $D$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $BC$ ) построим равносторонний треугольник  $BCD$ .
- Докажите, что около четырёхугольника  $ABDC$  можно описать окружность.
  - Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABDC$ .
14. В окружность вписана трапеция, основание  $AD$  которой является диаметром, а угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ . Хорда  $CE$  пересекает диаметр  $AD$  в точке  $P$  так, что  $AP : PD = 1 : 3$ .
- Докажите, что  $CP$  делит трапецию на две равновеликие части.
  - Найдите площадь треугольника  $BPE$ , если радиус окружности равен  $2\sqrt{7}$ .

15. В четырехугольнике  $ABCD$ , вписанном в окружность, биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $E$ , лежащей на стороне  $CD$ . Известно, что  $CD : BC = 3 : 1$ .
- Докажите, что точка  $E$  равноудалена от прямых  $AD$  и  $AB$ .
  - Найдите отношение площадей треугольников  $ADE$  и  $BCE$ .
16. Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ , а окружность описанную около треугольника  $ABC$ , — в точке  $M$ .
- Докажите, что треугольник  $BMC$  равнобедренный.
  - Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $KMC$ , если  $AC = 6$ ,  $BC = 7$ ,  $AB = 8$ .
17. Точка  $F$  лежит на меньшей дуге  $BC$  окружности, описанной около квадрата  $ABCD$ , причем  $\angle FCB = 2 \cdot \angle FBC$ . Прямая  $AF$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $T$ , а диагональ  $BD$  — в точке  $O$ .
- Докажите, что  $TO = TC$ .
  - Найдите длину стороны квадрата, если  $BO = 1$ .
18. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Диагональ  $AC$  лежит на биссектрисе угла  $BAD$  и пересекается с диагональю  $BD$  в точке  $K$ .
- Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $BKC$  подобны.
  - Найдите  $KC$ , если  $DC = 4$ ,  $AK = 6$ .
19. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Окружность, проходящая через вершины  $A$  и  $D$ , пересекает отрезок  $BM$  в точке  $L$ , а отрезок  $CN$  — в точке  $K$  ( $L$  и  $K$  отличны от концов отрезков  $BM$  и  $CN$ ).
- Докажите, что точки  $B$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $L$  лежат на одной окружности.
  - Найдите  $KN$ , если известно, что  $AK$  и  $BK$  перпендикулярны,  $AB = 25$ ,  $BC = 6$ ,  $CD = 22$ ,  $AD = 19$ .
20. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Его диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ .
- Докажите, что прямая, проходящая через точку  $P$  и середину стороны  $AD$ , перпендикулярна стороне  $BC$ .
  - Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ , если известно, что отрезки диагоналей равны:  $AP = 3$ ,  $BP = 4$ ,  $CP = 8$ .