1. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF, AH, AP и AQ на прямые DE, BE, CD и BC соответственно.

а) Докажите, что $\angle FAH = \angle PAQ$.

б) Найдите AH, если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.

2. Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O.

а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO, если сторона квадрата равна 1.

3. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 10$, $BC = 12$. На стороне AB отметили точки M_1 и M_2 так, что $AM_1 < AM_2$. Через точки M_1 и M_2 провели прямые, перпендикулярные стороне AB и отсекающие от треугольника ABC пятиугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$.

б) Найдите площадь данного пятиугольника.

4. Окружность, проходящая через вершину B треугольника ABC, касается стороны AC в точке D, такой, что BD — биссектриса угла B, и пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно.

а) Докажите, что $AE : CF = AB : BC$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AED и DFC, если известно, что $AE : CF = 2 : 3$.

5. Внутри окружности с центром O построен правильный шестиугольник $KOFPDL$ так, что его вершина D лежит на окружности. Из точки B, диаметрально противоположной точке D, проведены две хорды AB и BC, проходящие через вершины K и F шестиугольника соответственно.

а) Докажите, что $AK : KB = 3 : 7$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если радиус окружности равен 14.

6. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $KCMN$ так, что вершины K и M расположены на катетах AC и BC соответственно, а на гипотенузе AB — вершина N. Вершины квадрата $TPQR$ расположены на сторонах треугольника ABC, причём вершины P и Q находятся на катетах AC и BC соответственно, а вершины R и T — на гипотенузе AB.

а) Докажите, что точка C и центры квадратов $KCMN$ и $TPQR$ лежат на одной прямой.

б) Найдите длину стороны квадрата $TPQR$, если $AC = 5$ и $BC = 12$.

7. Пятиугольник $ABCDE$ — вписанный, точка M — пересечение диагоналей BE и AD. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.

б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

8. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что $BC = DE$.

б) Найдите длину стороны AB, если известно, что $DE = 4$, $AD = 7$, $BE = 8$ и $AB > BC$.

9. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Через точку B и середину отрезка OD проведена прямая, пересекающая сторону ED в точке T.

а) Докажите, что прямая BT делит площадь шестиугольника в отношении 5 : 13.

б) Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники BET и BCT с прямой BT, если сторона шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{13} - 1$.

10. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ через вершину A проведена прямая, которая пересекает отрезок CF в точке K и делит площадь шестиугольника $ABCDEF$ в отношении 1 : 11.

а) Докажите, что прямая AK делит диагональ FC в отношении 1 : 5.

б) Прямая AK пересекает описанную около шестиугольника $ABCDEF$ окружность в точке T. Найдите отношение, в котором прямая BT делит отрезок AC.