

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AP$  и  $CQ$ .
  - а) Докажите, что угол  $PAC$  равен углу  $PQC$ .
  - б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если известно, что  $PQ = 8$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ .
2. В остроугольном треугольнике  $KMN$  проведены высоты  $KB$  и  $NA$ .
  - а) Докажите, что угол  $ABK$  равен углу  $ANK$ .
  - б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABM$ , если известно, что  $KN = 8\sqrt{2}$  и  $\angle KMN = 45^\circ$ .
3. Около остроугольного треугольника  $ABC$  описана окружность с центром  $O$ . На продолжении отрезка  $AO$  за точку  $O$  отмечена точка  $K$  так, что  $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$ .
  - а) Докажите, что четырёхугольник  $OBKC$  вписанный.
  - б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника  $OBKC$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ , а  $BC = 48$ .
4. Около равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  описана окружность. Через точку  $C$  провели прямую, параллельную стороне  $AB$ . Касательная к окружности, проведённая в точке  $B$ , пересекает эту прямую в точке  $K$ .
  - а) Докажите, что треугольник  $BCK$  — равнобедренный.
  - б) Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $BCK$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ .
5. Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет  $BC$  в точке  $N$ .
  - а) Докажите, что  $\angle CAN = \angle CMN$ .
  - б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ANB$  и  $CBM$ , если  $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$ .
6. Точка  $O$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $BH$  — высота этого треугольника.
  - а) Докажите, что углы  $ABH$  и  $CBO$  равны.
  - б) Найдите  $BH$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 9$ ,  $BH = BO$ .
7. Точка  $O$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $BH$  — высота этого треугольника.
  - а) Докажите, что углы  $ABH$  и  $CBO$  равны.
  - б) Найдите  $BH$ , если  $AB = 16$ ,  $BC = 18$ ,  $BH = BO$ .
8. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ , величина угла  $AOC$  составляет  $120^\circ$ .
  - а) Докажите, что около четырёхугольника  $BDOE$  можно описать окружность.
  - б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 4$ , а  $\angle BED = 75^\circ$ .
9. В остроугольном треугольнике  $ABC$   $\angle A = 60^\circ$ . Высоты  $BN$  и  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .
  - а) Докажите, что  $AN = AO$ .
  - б) Найдите площадь  $\triangle AHO$ , если  $BC = 6\sqrt{3}$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ .
10. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ . Прямые, содержащие высоты  $BM$  и  $CN$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке  $H$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
  - а) Докажите, что  $AN = AO$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $AHO$ , если  $BC = \sqrt{15}$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ .
11. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ . Прямые, содержащие высоты  $BM$  и  $CN$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке  $H$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
  - а) Докажите, что  $AN = AO$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $AHO$ , если  $BC = 3$ ,  $\angle ABC = 15^\circ$ .
12. Прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$  вписан в окружность. Биссектриса угла  $A$  пересекает описанную окружность в точке  $A_1$ , биссектриса угла  $B$  пересекает описанную окружность в точке  $B_1$ , биссектриса угла  $C$  пересекает описанную окружность в точке  $C_1$ .
  - а) Докажите, что угол  $A_1BB_1 = 45^\circ$ .
  - б) Известно, что  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Найдите  $B_1C_1$ .
13. В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоты  $AH_1$  и  $CH_2$ , затем провели луч  $HM$ , который пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $K$ , где  $M$  — середина  $AC$ , а  $H$  — точка пересечения высот.
  - а) Докажите, что  $HM = MK$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $BCK$ , если  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $AC = 1$ .
14. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $H$ .
  - а) Докажите, что  $\angle BAH = \angle BB_1C_1$ .
  - б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника  $ABC$  до стороны  $BC$ , если  $B_1C_1 = 12$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

15. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . Окружность, описанная около треугольника  $ACD$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ .
- Докажите, что треугольник  $CDE$  равнобедренный.
  - Найдите площадь треугольника  $CDE$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 7$ ,  $AC = 6$ .
16. На окружности с центром  $O$  и диаметром  $MN$ , равным 34, взята точка  $K$  на расстоянии 15 от этого диаметра. Хорда  $KE$  пересекает радиус  $OM$  в точке  $F$  под углом, равным  $\arccos \frac{4}{5}$ .
- Докажите, что  $KF : FE = 125 : 29$ .
  - Найдите площадь треугольника  $KEN$ .
17. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Отрезок  $AP$  — диаметр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
- Докажите, что прямая  $HP$  пересекает отрезок  $BC$  в его середине.
  - Луч  $PH$  вторично пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $M$ . Найдите длину отрезка  $MC_1$ , если расстояние от центра этой окружности до прямой  $BC$  равно 4,  $\angle BPH = 120^\circ$ .
18. В треугольнике  $KLM$  биссектрисы внешних углов при вершинах  $K$  и  $M$  пересекаются в точке  $N$ . Через точки  $K$ ,  $N$  и  $M$  проведена окружность с центром в точке  $O$ .
- Докажите, что точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $O$  лежат на одной окружности.
  - Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $KLM$ , если площадь треугольника  $KMO$  равна  $27\sqrt{3}$ , а угол  $KLM$  равен  $120^\circ$ .
19. Высота  $BH$  треугольника  $ABC$  в  $\sqrt{2}$  раз больше радиуса описанной около треугольника  $ABC$  окружности с центром  $O$ .
- Доказать, что прямая, проходящая через точки  $K$  и  $M$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $H$  на стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно, проходит через точку  $O$ .
  - Найдите радиус описанной около треугольника  $ABC$  окружности, если  $AB = 6$ ,  $BC = 3\sqrt{2}$ .
20. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  — тупой, угол  $B$  равен  $45^\circ$  и  $AH$  — высота. Прямая  $AH$  пересекает описанную около треугольника  $ABC$  окружность в точке  $D$ .
- Докажите, что дуги  $BC$  и  $DA$  равны.
  - Найдите  $BC$ , если  $AC = 8$  и площадь треугольника  $BDH$  равна 9.
21. Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $O$  — центр вписанной в него окружности. На стороне  $BC$  отмечена такая точка  $M$ , что  $CM = AC$  и  $BM = AO$ .
- Докажите, что прямые  $AB$  и  $OM$  параллельны.
  - Найдите площадь четырёхугольника  $ABMO$ , если угол  $ACB$  прямой и  $AC = 4$ .
22. В треугольнике  $ABC$  продолжения высоты  $CC_1$  и биссектрисы  $BB_1$  пересекают описанную окружность в точках  $N$  и  $M$  соответственно,  $\angle ABC = 40^\circ$  и  $\angle ACB = 85^\circ$ .
- Докажите, что  $BM = CN$ .
  - Прямые  $BC$  и  $MN$  пересекаются в точке  $D$ . Найдите площадь треугольника  $BDN$ , если его высота  $BH$  равна 6.
23. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  острый, угол  $B$  равен  $45^\circ$  и  $AH$  — высота. Прямая  $AH$  пересекает описанную около треугольника  $ABC$  окружность в точке  $D$ .
- Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны.
  - Найдите  $AC$ , если  $CB = 8$  и площадь треугольника  $CAD$  равна 12.
24. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры вневписанных окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , касающихся отрезков  $AB$  и  $AC$  соответственно. Точка  $M$  — середина большей дуги  $BC$  окружности  $\omega$ .
- Докажите, что точка  $M$  лежит на прямой  $O_1O_2$ .
  - На биссектрисе угла  $BAC$  выбрана точка  $K$  такая, что  $AK^2 = AO_1 \cdot AO_2$ . Найдите радиус описанной окружности треугольника  $BKC$ , если сумма радиусов окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равна  $5\sqrt{3}$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .
25. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  продолжение биссектрисы  $CK$  этого треугольника (точка  $K$  лежит на гипотенузе  $AB$ ) пересекает его описанную окружность в точке  $L$ . Прямая, проходящая через точку  $L$  и середину гипотенузы  $AB$ , пересекает вторично описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $M$  и пересекает катет  $BC$  в точке  $P$ .
- Докажите, что прямая  $MK$  является касательной к описанной окружности треугольника  $BMP$ .
  - Найдите площадь треугольника  $MKP$ , если  $AC = 3$  и  $BC = 4$ .
26. В остроугольном треугольнике  $ABC$  отмечены:  $H$  — точка пересечения высот,  $O$  — центр описанной окружности,  $A_1$  — середина  $BC$ . Луч  $A_1H$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $D$ , причем  $DH = 2A_1H$ .
- Докажите, что  $OH$  перпендикулярна  $DA_1$ .
  - Пусть дополнительно известно, что описанная окружность около треугольника  $OHA_1$  касается  $AH$ . Найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .

27. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ .

а) Докажите, что  $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$ .

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , до стороны  $BC$ , если  $B_1C_1 = 6$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

28. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Касательная к окружности в точке  $C$  пересекает биссектрису угла  $ABC$  в точке  $K$ , причем  $\angle BKC = \frac{1}{2}(3\angle BAC - \angle ACB)$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

б) Известно, что  $AC + AB = 4$ , а сумма расстояний от центра окружности  $O$  до сторон  $AC$  и  $BC$  равна  $\frac{7}{4}$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

29. Отрезок  $BL$  — диаметр описанной окружности треугольника  $ABC$ , где  $\angle B = 85^\circ$ ,  $\angle C = 25^\circ$ . Продолжение высоты  $BT$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $\angle ABM = \angle CAL$ .

б) Найдите длину отрезка  $ML$ , если радиус описанной окружности равен  $17\sqrt{2}$ .

30. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  в два раза больше стороны  $AB$ . Продолжение биссектрисы  $AL$  пересекает описанную около треугольника  $ABC$  окружность в точке  $P$ . Известно, что  $BC = 6$ ,  $LP = 2$ .

а) Докажите, что прямые  $AC$  и  $BP$  параллельны.

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

31. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Известно, что  $\angle BAC = 2\angle ABC$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Вокруг треугольника  $AOC$  описана окружность, которая пересекает сторону  $BC$  в точке  $P$ .

а) Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $PAC$  подобны.

б) Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$  и  $AC = 4$ .