

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ .

а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

2. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA .

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM , если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45^\circ$.

3. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

4. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB . Касательная к окружности, проведённая в точке B , пересекает эту прямую в точке K .

а) Докажите, что треугольник BCK — равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK , если $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$.

5. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$.

6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.

б) Найдите BH , если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.

7. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.

б) Найдите BH , если $AB = 16$, $BC = 18$, $BH = BO$.

8. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O , величина угла AOC составляет 120° .

а) Докажите, что около четырехугольника $BDOE$ можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 4$, а $\angle BED = 75^\circ$.

9. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около ΔABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь ΔAHO , если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

10. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

11. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.

12. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке A_1 , биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке B_1 , биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке C_1 .

а) Докажите, что угол $A_1BB_1 = 45^\circ$.

б) Известно, что $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$. Найдите B_1C_1 .

13. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_1 и CH_2 , затем провели луч HM , который пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке K , где M — середина AC , а H — точка пересечения высот.

а) Докажите, что $HM = MK$.

б) Найдите площадь треугольника BCK , если $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, $AC = 1$.

14. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BAH = \angle BB_1C_1$.

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до стороны BC , если $B_1C_1 = 12$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

15. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Окружность, описанная около треугольника ACD пересекает сторону AB в точке E .

- Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника CDE , если $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 6$.

16. На окружности с центром O и диаметром MN , равным 34, взята точка K на расстоянии 15 от этого диаметра. Хорда KE пересекает радиус OM в точке F под углом, равным $\arccos \frac{4}{5}$.

- Докажите, что $KF : FE = 125 : 29$.
- Найдите площадь треугольника KEN .

17. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Отрезок AP — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC .

a) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке M . Найдите длину отрезка MC_1 , если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120^\circ$.

18. В треугольнике KLM биссектрисы внешних углов при вершинах K и M пересекаются в точке N . Через точки K , N и M проведена окружность с центром в точке O .

a) Докажите, что точки K , L , M и O лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM , если площадь треугольника KMO равна $27\sqrt{3}$, а угол KLM равен 120° .

19. Высота BH треугольника ABC в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса описанной окружности треугольника ABC окружности с центром O .

a) Доказать, что прямая, проходящая через точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и BC соответственно, проходит через точку O .
б) Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC окружности, если $AB = 6$, $BC = 3\sqrt{2}$.

20. В треугольнике ABC угол C — тупой, угол B равен 45° и AH — высота. Прямая AH пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D .

- Докажите, что дуги BC и DA равны.
- Найдите BC , если $AC = 8$ и площадь треугольника BDH равна 9.

21. Дан треугольник ABC . Точка O — центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M , что $CM = AC$ и $BM = AO$.

- Докажите, что прямые AB и OM параллельны.
- Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если угол ACB прямой и $AC = 4$.

22. В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle ACB = 85^\circ$.

- Докажите, что $BM = CN$.
- Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 6.

23. В треугольнике ABC угол C острый, угол B равен 45° и AH — высота. Прямая AH пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D .

- Докажите, что прямые AB и CD параллельны.
- Найдите AC , если $CB = 8$ и площадь треугольника CAD равна 12.

24. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω . Точки O_1 и O_2 — центры вневписанных окружностей ω_1 и ω_2 , касающихся отрезков AB и AC соответственно. Точка M — середина большей дуги BC окружности ω .

- Докажите, что точка M лежит на прямой O_1O_2 .
- На биссектрисе угла BAC выбрана точка K такая, что $AK^2 = AO_1 \cdot AO_2$. Найдите радиус описанной окружности треугольника BKC , если сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2 равна $5\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

25. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C продолжение биссектрисы CK этого треугольника (точка K лежит на гипотенузе AB) пересекает его описанную окружность в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину гипотенузы AB , пересекает вторично описанную окружность треугольника ABC в точке M и пересекает катет BC в точке P .

- Докажите, что прямая MK является касательной к описанной окружности треугольника BMP .
- Найдите площадь треугольника MKP , если $AC = 3$ и $BC = 4$.

26. В остроугольном треугольнике ABC отмечены: H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, A_1 — середина BC . Луч A_1H пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D , причем $DH = 2A_1H$.

a) Докажите, что OH перпендикулярна DA_1 .
б) Пусть дополнительно известно, что описанная окружность около треугольника OHA_1 касается AH . Найдите угол между прямыми AA_1 и BC .

27. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1 = 6$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

28. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке C пересекает биссектрису угла ABC в точке K , причем $\angle BKC = \frac{1}{2}(3\angle BAC - \angle ACB)$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Известно, что $AC + AB = 4$, а сумма расстояний от центра окружности O до сторон AC и BC равна $\frac{7}{4}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

29. Отрезок BL — диаметр описанной окружности треугольника ABC , где $\angle B = 85^\circ$, $\angle C = 25^\circ$. Продолжение высоты BT треугольника ABC пересекает эту окружность в точке M .

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle CAL$.

б) Найдите длину отрезка ML , если радиус описанной окружности равен $17\sqrt{2}$.

30. Сторона AC треугольника ABC в два раза больше стороны AB . Продолжение биссектрисы AL пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке P . Известно, что $BC = 6$, $LP = 2$.

а) Докажите, что прямые AC и BP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ABC .

31. Дан остроугольный треугольник ABC . Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P .

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB , если $BC = 6$ и $AC = 4$.