

1. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ 
  - а) Докажите, что плоскость  $BA_1 C_1$  и прямая  $B_1 D$  перпендикулярны.
  - б) Найдите косинус угла между плоскостями  $BA_1 C_1$  и  $BA_1 D_1$ .
2. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
  - а) Докажите, что прямые  $B_1 D$  и  $AC$  перпендикулярны.
  - б) Найдите угол между плоскостями  $AB_1 D_1$  и  $ACD_1$ .
3. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .
  - а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен  $\arccos \frac{7}{25}$ .
  - б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.
4. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .
  - а) Докажите, что высота пирамиды, проведенная к боковой грани, больше чем высота пирамиды, проведенная к основанию.
  - б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.
5. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ 
  - а) Докажите, что плоскости  $AB_1 D_1$  и  $A_1 BC$  перпендикулярны.
  - б) Найдите угол между плоскостями  $AB_1 D_1$  и  $ACD_1$ .
6. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
  - а) Докажите, что плоскости  $A_1 BD$  и  $B_1 CD_1$  параллельны.
  - б) Пусть дополнительно известно, что параллелепипед прямоугольный, кроме того  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $CC_1 = 4$ . Найдите тангенс угла между плоскостями  $CDD_1$  и  $BDA_1$ .
7. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны рёбра  $AB = 35$ ,  $AD = 12$ ,  $CC_1 = 21$ .
  - а) Докажите, что высоты треугольников  $ABD$  и  $A_1 BD$ , проведённые к стороне  $BD$ , имеют общее основание.
  - б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1 DB$ .
8. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка  $D$  — середина ребра  $BB_1$ .
  - а) Пусть прямые  $C_1 D$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что угол  $EAC$  — прямой.
  - б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADC_1$ .
9. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1.
  - а) Докажите, что плоскости  $AA_1 D_1$  и  $DB_1 F_1$  перпендикулярны.
  - б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DB_1 F_1$ .
10. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
  - а) Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $ACB_1$ .
  - б) Найдите угол между плоскостями  $AD_1 C_1$  и  $A_1 D_1 C$ .
11. Дана прямая призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Основание призмы — ромб с острым углом  $A = 60^\circ$ .
  - а) Докажите, что  $AD_1 = DB_1$ .
  - б) Найдите угол между плоскостью  $AC_1 B$  и плоскостью  $ABD$ , если высота призмы равна 5, а ребро основания равно 4.
12. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  сторона основания  $AB = 8\sqrt{3}$ , а боковое ребро  $AA_1 = 5$ .
  - а) Найдите длину отрезка  $A_1 K$ , где  $K$  — середина ребра  $BC$ .
  - б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $BCA_1$  и  $BB_1 C_1$ .
13. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  сторона основания  $AB = 7\sqrt{3}$ , а боковое ребро  $AA_1 = 8$ .
  - а) Докажите, что плоскость  $BCA_1$  перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро  $AA_1$  и середину ребра  $B_1 C_1$ .
  - б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $BCA_1$  и  $BB_1 C_1$ .
14. Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с прямоугольником  $ABCD$  в основании. Сторона  $AB$  равна 4, а  $BC$  равна  $4\sqrt{2}$ . Вершина пирамиды  $S$  проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины  $A$  и  $C$  на ребро  $SB$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$ .
  - а) Докажите, что точка  $P$  является серединой отрезка  $BQ$ .
  - б) Найдите угол между плоскостями  $SBA$  и  $SBC$ , если ребро  $SD$  равно 8.
15. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка  $D$  — середина ребра  $CC_1$ .
  - а) Докажите, что плоскость  $ADB_1$  делит объем призмы пополам.
  - б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADB_1$ .

16. Дана прямая призма  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Докажите, что линия пересечения плоскостей  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$  параллельна основаниям призмы.

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$ , если известно, что  $AC = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $AB = \sqrt{5}$ ,  $CC_1 = 3$ .

17. Дана правильная треугольная пирамида.

а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.

б) Пусть известно, что косинус угла между боковой гранью и основанием равен  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

18. Дана правильная треугольная пирамида.

а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.

б) Пусть косинус угла между боковой гранью и основанием равен  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды  $SABCD$  является прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $BC = 2AB$ . Диагонали прямоугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Отрезок  $SO$  является высотой пирамиды  $SABCD$ . Из вершин  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $SB$ .

а) Докажите, что  $BP : PQ = 1 : 3$ .

б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре  $SB$ , если  $SB = BC$ .

20. Основанием четырехугольной пирамиды  $SABCD$  является прямоугольник  $ABCD$ , причем  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 6$ . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $SB$ .

а) Докажите, что  $P$  — середина  $BQ$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $SBA$  и  $SBC$ , если  $SD = 9$ .

21. В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Основание высоты  $SO$  этой пирамиды является серединой ребра  $AB$ .

а) Докажите, что  $SA = SC$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $SAC$  и  $ABC$ , если  $AB = 30$ ,  $SC = 17$ ,  $CB = 24$ .

22. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  со стороной основания  $\sqrt{3}$  и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости  $ACA_1$  и  $B_1CE_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями  $B_1CE_1$  и  $ABC$ .

23. Дана четырехугольная пирамида  $SABCD$  с прямоугольником  $ABCD$  в основании,  $AB = 2$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ . Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Из вершин  $A$  и  $C$  на ребро  $SB$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$ .

а) Докажите, что точка  $P$  является серединой отрезка  $BQ$ .

б) Найдите угол между гранями  $SBA$  и  $SBC$ , если ребро  $SD = 4$ .

24. Дана четырехугольная пирамида  $SABCD$  с прямоугольником  $ABCD$  в основании,  $AB = 6$  и  $BC = 6\sqrt{2}$ . Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Из вершин  $A$  и  $C$  на ребро  $SB$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$ .

а) Докажите, что точка  $P$  является серединой отрезка  $BQ$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $SBA$  и  $SBC$ , если ребро  $SD = 12$ .