

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1 : 4$, считая от вершины D .
- Докажите, что сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C , W и A_1 — параллелограмм.
 - Найдите площадь этого сечения.
2. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.
- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .
3. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.
- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .
4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$ и $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1 : 4$, считая от вершины D .
- Докажите, что любая плоскость, проходящая через вершины A_1 и C , делит параллелепипед на две равновеликие фигуры.
 - Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C , W и A_1 .
5. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- Докажите, что сечение куба плоскостью $A_1 BE$ — это равнобокая трапеция.
 - Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 2.
6. Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- Докажите, что сечение куба плоскостью $D_1 AE$ есть равнобокая трапеция.
 - Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 4.
7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке K .
- Докажите, что $B_1 K : KC_1 = 2 : 1$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .
8. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.
- Докажите, что прямые $B_1 P$ и QB перпендикулярны.
 - Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 10.
9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через диагональ BD_1 проведена плоскость α , параллельная прямой AC .
- Докажите, что прямая пересечения плоскости α с плоскостью основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ параллельна прямой $A_1 C_1$.
 - Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB = 6$, $BC = 8$, $CC_1 = 10$.
10. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длины 1. Точка P — середина $A_1 D_1$, точка Q делит отрезок AB_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины A , R — точка пересечения отрезков BC_1 и $B_1 C$.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью PQR .
 - Найдите отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 куба.
11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка P лежит на ребре AA_1 , причём $A_1 P : PA = 3 : 4$, $BB_1 = 14$, $AD = 6$. Плоскость DPB_1 пересекает ребро CC_1 в точке N , тангенс угла между прямой NP и плоскостью основания $ABCD$ равен $\frac{1}{5}$.
- Докажите, что четырёхугольник $DPB_1 N$ — ромб.
 - Найдите площадь сечения $DPB_1 N$.
12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая ребра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.
- Докажите, что сечение $AFC_1 E$ — параллелограмм.
 - Найдите площадь сечения, если известно, что $AFC_1 E$ — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.
13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая ребра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.
- Докажите, что сечение $AFC_1 E$ — параллелограмм.
 - Найдите площадь сечения, если известно, что $AFC_1 E$ — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.
14. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки K , L и M — середины рёбер AB , $B_1 C_1$ и DD_1 .
- Докажите, что сечение куба плоскостью KLM является правильным многоугольником.
 - Найдите расстояния от точки A до плоскости KLM , если ребро куба равно 2.

15. На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 6$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.
- Докажите, что плоскость FTD_1 делит ребро AA_1 в отношении $2 : 5$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTD_1 .
16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = 5$, $BC = 3$ и $AA_1 = 4$.
- Докажите, что плоскость α содержит точку D_1 .
 - Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро $A_1 B_1$.
17. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 2$, точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Длины рёбер AD и $A A_1$ равны 6 и 10 соответственно.
- Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является равнобедренной трапецией.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью ETD_1 , если $AB = 2\sqrt{10}$.
18. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длины 1. Точка P — середина $A_1 D_1$, точка Q делит отрезок AB_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины A , R — точка пересечения отрезков BC_1 и $B_1 C$.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью PQR .
 - Найдите отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 куба.
19. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 20\sqrt{3}$, $AD = 42$ и $AA_1 = 56$. На отрезках BC_1 и BD отмечены точки M и N соответственно так, что прямые AM и $A_1 N$ пересекаются и $BN : ND = 1 : 7$.
- Докажите, что угол между прямой $D_1 M$ и плоскостью BCC_1 равен 30° .
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью AMN .
20. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 5. На его ребре AA_1 отмечена точка M так, что $AM = 3$. Через точки M и B_1 проведена плоскость α , параллельная AC_1 .
- Докажите, что $D_1 N : NA_1 = 1 : 2$, если N — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 D_1$.
 - Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .
21. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через точки B_1 и D_1 проходят плоскости α и β , каждая из которых делит диагональ AC_1 на части, относящиеся друг к другу как $1 : 3$. Также $AB = 4$, $BC = 3$ и высота параллелепипеда равна $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.
- Докажите, что плоскости α и β перпендикулярны.
 - Найдите отношение объемов частей, на которые плоскости α и β делят параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
22. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AB = 4$, $BC = 2$, $AA_1 = 2$. Точка M — середина $B_1 C_1$, точка L делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $1 : 3$, считая от вершины B_1 . Плоскость LMC пересекает ребро AB в точке K .
- Докажите, что K — середина AB .
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью KLM .
23. В основании параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб с диагоналями $AC = 2$, $BD = \sqrt{2}$, пересекающимися в точке O . Ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 45° , а вершина A_1 ортогонально проецируется в точку O . Через точку A_1 перпендикулярно боковым ребрам проходит плоскость α .
- Докажите, что сечение призмы плоскостью α — квадрат.
 - Найдите отношение, в котором плоскость α делит объем призмы.
24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB и $D_1 C_1$ отмечены точки M и N , такие, что $D_1 N : NC_1 = BM : MA = 1 : 3$, точка O — центр грани $BCC_1 B_1$. Через точки A_1 и O проходит плоскость α параллельно прямой MN и составляет с плоскостями ABC , $BB_1 C$ и DCC_1 одинаковые углы.
- Докажите, что стороны параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ относятся как $3 : 4 : 5$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , если ребра параллелепипеда равны 3, 4, 5.
25. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M и K — середины его ребер AB и BC соответственно. Плоскость α проходит через точку B параллельно прямым $A_1 M$ и $B_1 K$.
- Докажите, что плоскость α проходит через точку D .
 - Найдите площадь сечения куба плоскостью α , если его ребра равны 2.
26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AD = 2AA_1$, $AB = 3AA_1$. Плоскость α проходит через вершины A и C_1 и пересекает ребро CD в точке N такой, что $CN = 2ND$.
- Докажите, что плоскость α делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $2 : 1$.
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , если $AA_1 = 1$.

27. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

а) Докажите, что точка M — середина ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите высоту призмы, если ее объем равен 5 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : KC_1 = 2 : 3$.