

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Точка T — середина ребра AD .
 - а) Докажите, что плоскость $A_1 BT$ делит объем куба в отношении $1 : 11$.
 - б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$.
2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1.
 - а) Докажите, что объем пирамиды $B_1 A D_1 C_1 B$ равен $\frac{1}{3}$.
 - б) Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$.
3. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.
 - а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
 - б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .
4. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6.
 - а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
 - б) Найдите расстояние от центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости BDC_1 .
5. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Высота призмы равна 3.
 - а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки A , A_1 и середину ребра $B_1 C_1$, перпендикулярна плоскости $A_1 BC$.
 - б) Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до плоскости BCA_1 .
6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1, T — середина ребра AD .
 - а) Докажите, что объем пирамиды $AA_1 TB$ в 12 раз меньше объема куба.
 - б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$.
7. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$.
 - а) Докажите, что сечение призмы плоскостью BCM , где M — середина ребра $A_1 C_1$, является прямоугольной трапецией.
 - б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM .
8. Ребро основания правильной треугольной призмы $LMNL_1 M_1 N_1$ равно её высоте и равно $2\sqrt{5}$.
 - а) Докажите, что сечение призмы, проходящее через L , M_1 и точку T — середину ребра $L_1 N_1$, является прямоугольным треугольником.
 - б) Найдите расстояние от точки L_1 до плоскости $LM_1 T$.
9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.
 - а) Докажите, что плоскость $FB_1 C_1$ перпендикулярна плоскости $BB_1 F$.
 - б) Найдите расстояние от точки B до плоскости $FB_1 C_1$.
10. Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Радиус основания конуса равен 1.
 - а) Докажите, что треугольник ADP , где $AD \parallel BC$ и AD — хорда основания, является искомым сечением.
 - б) Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения.
11. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2.
 - а) Докажите, что точки B и S равноудалены от плоскости ADM , где M — середина ребра SC .
 - б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM .
12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6.
 - а) Докажите, что $AS \perp BC$.
 - б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .
13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.
 - а) Докажите, что плоскости DEA_1 и BDD_1 перпендикулярны.
 - б) Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1 .
14. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1.
 - а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости ACD_1 .
 - б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .
15. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ высота равна 1, а сторона основания равна $\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра AA_1 .
 - а) Докажите, что пирамиды $MDD_1 C_1$ и $ACDD_1$ равновелики.
 - б) Найдите расстояние от точки M до плоскости $DA_1 C_1$.

16. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.
- Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
 - Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .
17. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA' равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер $A'C'$ и $B'C'$ соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .
- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .
18. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1 L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
- Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ .
 - Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ .
19. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.
- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
 - Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .
20. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .
21. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах $B_1 C_1$ и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость $A_1 PQ$ пересекает ребро BC в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра BC .
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1 PQ$.
22. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра $A_1 B_1$, а точка P делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1 . Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .
23. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .
- Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки A , делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC и SA , пополам.
 - Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.
24. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.
- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
 - Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .
25. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 7. На ребре CC_1 отмечена точка M , причём $CM = 1$.
- Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1 B_1 C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
 - Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .
26. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на боковых рёбрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки K и M так, что $AK : A_1 K = 2 : 3$, $DM : D_1 M = 4 : 1$.
- Докажите, что плоскость BMK параллельна прямой AC .
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости BMK , если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.
27. $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная призма, сторона AB равна 16. Через точки M и P , лежащие на рёбрах AC и BB_1 соответственно, проведена плоскость α , параллельная прямой AB . Сечение призмы этой плоскостью — четырёхугольник, одна сторона которого равна 16, а три другие равны между собой.
- Докажите что периметр сечения призмы плоскостью α больше 40.
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости α , если упомянутый периметр равен 46.

28. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые ребра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребрах AM и AB — точка F и G соответственно так, что $MF = BE = BG = 3$.
- Докажите, что плоскость GEF проходит через точку C .
 - Найдите длину отрезка, по которому плоскость GEF пересекает грань CMD пирамиды.
29. Точка K лежит на стороне AB основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны. Плоскость α проходит через точку K параллельно плоскости ASD . Сечение пирамиды плоскостью α — четырехугольник, в который можно вписать окружность.
- Докажите, что $BK = 2AK$.
 - Найдите расстояние от вершины S до плоскости α , если все ребра пирамиды равны 1.
30. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 14$, высота $SH = 24$. Точка P — середина бокового ребра SD , а точка N — середина ребра CD . Плоскость ABP пересекает боковое ребро SC в точке K .
- Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.
 - Найдите расстояние от точки K до плоскости ABS .
31. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, а боковое ребро SA равно 17. На ребрах AB и SB отмечены точки K и L соответственно, причем $AK = SL = 7$. Плоскость α проходит через точки K, L и C .
- Докажите, что плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
 - Найдите расстояние от вершины пирамиды S до плоскости α .
32. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AC равна $10\sqrt{3}$, а боковое ребро равно $3\sqrt{10}$. На ребре AC отмечена точка E так, что $AE = \sqrt{3}$. Точки F, N — середины сторон A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость α параллельна прямой AB и содержит точки E и N .
- Докажите, что прямая CF перпендикулярна плоскости α .
 - Найдите расстояние от точки F до плоскости α .
33. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ является треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины ребер AC и BC проведена плоскость α .
- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
 - Найдите расстояние от вершины C до плоскости α .
34. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .
35. В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ ребра $BC = 8$, $CD = 3$, $BB_1 = 6$. Точка Q — середина ребра CC_1 .
- Докажите, что угол между плоскостями BD_1Q и ABC равен $\arccos \frac{8}{\sqrt{137}}$.
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости BD_1Q .
36. В правильной треугольной пирамиде $MNPQ$ с вершиной M сторона основания равна 15, высота равна $\sqrt{6}$. На ребрах NP , NQ и NM отмечены точки E, F, K соответственно, причем $NE = NF = 3$ и $NK = \frac{9}{5}$.
- Докажите, что плоскости EFK и MPQ параллельны.
 - Найдите расстояние от точки K до плоскости MPQ .
37. Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB = 8$, $BC = 12$, $SA = 6$, $SB = 10$, $SD = 6\sqrt{5}$.
- Докажите, что прямая SA перпендикулярна плоскости ABC .
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB .
38. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Высота пирамиды проходит через точку D , M — середина бокового ребра SC . Угол между прямыми AM и BC равен 60° .
- Докажите, что $SD : CD = \sqrt{11}$.
 - Найдите расстояние от точки D до плоскости ABS , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{33}$.
39. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точки M и N являются серединами ребер AB и AD соответственно.
- Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.
 - Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = 6$.
40. Точка M — середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M .
- Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из ребер этой грани.
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A , $AC = 10$, $AA_1 = 12$.

41. Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- Докажите, что плоскости $AD_1 C$ и $BB_1 D_1$ перпендикулярны.
 - Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости $AD_1 C$, если $AB = 5$ и $AA_1 = 6$.
42. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 12, точки K и L — середины ребер AD и $C_1 D_1$ соответственно, а точка F расположена на ребре BC так, что $CF = 3BF$.
- Докажите, что плоскость KLF делит диагональ AC основания $ABCD$ в отношении $2 : 3$, считая от точки A .
 - Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости KLF .
43. На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$.
- Пусть точка F делит ребро BB_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины B_1 . Докажите, что угол между прямыми BE и AC_1 равен углу $AC_1 F$.
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости $AC_1 F$, если ребро куба равно 3.
44. Дан тетраэдр $ABCD$, на ребрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 3 : 7$, а $KLMN$ — квадрат со стороной 3.
- Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$.
 - Найдите расстояние от точки C до KLM , если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 50.
45. Дан тетраэдр $ABCD$. На ребре AC выбрана точка K так, что $AK : KC = 3 : 7$. Также на ребрах AD , BD и BC выбраны точки L , M и N соответственно так, что $KLMN$ — квадрат со стороной 3.
- Докажите, что ребра AB и CD взаимно перпендикулярны.
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости $KLMN$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен 100.
46. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K , L , M , N лежат на ребрах AC , AD , DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ — квадрат со стороной 2, $AK : KC = 2 : 3$.
- Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$.
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости $KLMN$, если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 25.
47. Дан тетраэдр $ABCD$, на ребрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 3 : 7$, а $KLMN$ — квадрат со стороной 2.
- Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$.
 - Найдите расстояние от точки C до KLM , если известно, что объем пирамиды $CKLM$ равен 50.
48. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно равны. Точки M , N и K середины боковых ребер BD , AC и DC соответственно. Через точку K проведена секущая плоскость α , параллельная ребрам BD и AC .
- Докажите, что прямая MN перпендикулярна плоскости α .
 - Найдите расстояние от точки M до плоскости α , если $AC = BD = 14$, $BC = AD = 13$ и $AB = CD = 15$.
49. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно равны. Точки M , N и K — середины боковых ребер BD , AC и DC соответственно. Через точку K проведена секущая плоскость α , параллельная ребрам BD и AC .
- Докажите, что прямая MN перпендикулярна секущей плоскости.
 - Найдите расстояние от точки M до плоскости α , если $AC = BD = 14$, $BC = AD = 13$ и $AB = CD = 15$.
50. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M середина SC , точка N делит ребро SB в отношении $3 : 2$, считая от вершины S .
- Докажите, что точки A , E , M и N лежат в одной плоскости.
 - Найдите расстояние от точки S до этой плоскости, если $AB = 2$, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$.
51. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ длина бокового ребра AA_1 равна 2. Шар с центром в точке O касается всех граней этой призмы. Точки M , N и K — середины ребер AB , $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно, P — точка пересечения прямой NO с плоскостью основания ABC .
- Докажите, что прямые PK и MO параллельны.
 - Найдите расстояние от точки O до плоскости APK .
52. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра $DD_1 = 24$, $AD = 8$ и $AB = 7,5$. На ребрах AA_1 и CD отмечены точки P и K соответственно, причем $DK = 5$, $A_1 P = 6$. Плоскость BKP пересекает ребро DD_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра DD_1 .
 - Найдите расстояние от точки D до плоскости BKP .
53. В правильной треугольной призме точка M лежит на высоте основания BD , причем $BM : MD = 3 : 1$, точка N лежит на диагонали CB_1 боковой грани $CC_1 B_1 B$. Прямые AN и $A_1 M$ пересекаются.
- Докажите, что $CN : NB_1 = 2 : 3$.
 - Найдите расстояние от точки M до плоскости ACN , если сторона основания призмы равна 5, а высота равна 10.
54. Все грани призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 2. Плоские углы при вершине A равны 60° каждый. Через середину диагонали $A_1 C$ проведена плоскость α , перпендикулярная этой диагонали.
- Докажите, что сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α — квадрат.
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости α .

55. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно прямой AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K .
- Докажите, что K — середина CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.
56. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 2 : 1$, $AB = 6$ и $SO = 3\sqrt{7}$.
- Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .
 - Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .
57. Дан тетраэдр $SABC$. На его ребре AC выбрана точка P так, что $AP : PC = 3 : 5$. Также на ребрах SA , SB и BC выбраны точки T , Q и R соответственно так, что $PTQR$ — квадрат со стороной 3.
- Докажите, что $BR : RC = 3 : 5$.
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости PTQ , если известно, что объём тетраэдра равен 32.
58. В пирамиде $SABC$ боковые рёбра SA , SB и SC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.
- Докажите, что пирамида $SABC$ правильная.
 - На рёбрах SA и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $\frac{SK}{KA} = \frac{SM}{MC} = \frac{1}{4}$. Найдите расстояние от вершины S пирамиды до плоскости BKM .
59. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра DD_1 и AA_1 в точках M и K соответственно так, что $DM : MD_1 = 4 : 1$, $AK : KA_1 = 2 : 3$, а ребро AB — в середине L .
- Докажите, что плоскость α проходит через точку C .
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости α , если сторона ромба равна $2\sqrt{10}$, тангенс острого угла ромба равен $\frac{3}{4}$, а высота призмы равна 10.
60. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ со стороной основания 16 на ребрах AC и $A_1 C_1$ выбраны соответственно точки M и K так, что $AM : MC = 11 : 5$, $A_1 K : KC_1 = 3 : 5$, точка N — середина BC .
- Докажите, что точка B_1 лежит в плоскости KMN .
 - Найдите высоту призмы, если известно, что она равна расстоянию от точки C_1 до плоскости KMN .
61. В пирамиде $ABCD$ ребра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, так что $AB = BC = AC = 1$. На ребрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 5$.
- Докажите, что пирамида $ABCD$ правильная.
 - Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .
62. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. Точка K — точка пересечения диагоналей грани $ACC_1 A_1$, точка L делит ребро $A_1 B_1$ так, что $A_1 L : LB_1 = 3 : 1$, точка M делит ребро BC в отношении $CM : MB = 1 : 3$.
- Докажите, что плоскость KML делит ребро BB_1 в отношении 9 : 1, считая от точки B .
 - Найдите расстояние от вершины A до плоскости KML , если $AB = BC = 4\sqrt{5}$, $AA_1 = 20$, $AC = 16$.
63. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через точку M пересечения медиан грани SBC перпендикулярно плоскости основания проходит плоскость α , делящая AB в отношении 2 : 1, считая от вершины A .
- Докажите, что плоскость α проходит через точку C .
 - Найдите расстояние от точки пересечения медиан грани ADS до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{10}$.
64. Точка P — середина ребра AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- Докажите, что середина ребра DC принадлежит плоскости $A_1 C_1 P$.
 - Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости $A_1 C_1 P$, если длина ребра куба равна 3.
65. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — середина ребра $B_1 C_1$. Плоскость α проходит через точки B , K и D .
- Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.
 - Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α , если ребро куба равно 3.
66. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A , B и C так, что отрезок AB — диаметр основания. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен 45° .
- Докажите, что $\sin^2 \frac{\angle ASC}{2} + \sin^2 \frac{\angle CSB}{2} = \frac{1}{2}$.
 - Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости SBC , если радиус основания равен 5, а $\cos \angle ASC = 0,6$.
67. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и $A_1 B_1$ соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1 K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно плоскости $ABB_1 A_1$.
- Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .
 - Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α , если все ребра призмы равны 16.

- 68.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра A_1B_1 . Плоскость α проходит через точки A , K и C .
- Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 6.