1. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Точка M — середина ребра BC, точка L — середина ребра AB.

а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой CL и содержащая прямую DM, делит ребро AB в отношении 3 : 1, считая от вершины A.

б) Найдите угол между прямыми DM и CL.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 проходит через середину ребра BC.

б) Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1.

4. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AC_1 и параллельная прямой CB_1 проходит через середину ребра A_1B_1.

б) Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

5. В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие ребра DC и AB, перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB, и параллельно DC и AB. Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

6. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что угол между прямыми BE и AD равен углу CBE.

б) Найдите угол между прямыми BE и AD.

7. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$.

а) Пусть точка F делит ребро BB_1 в отношении 1 : 2, считая от вершины B_1. Докажите, что угол между прямыми BE и AC_1 равен углу AC_1F.

б) Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 6, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{1}{9}$. Точка M — середина ребра SC, точка N — середина ребра AC.

а) Докажите, что угол между прямыми BM и SA либо равен углу BMN, либо дополняет его до 180°.

б) Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

9. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведена высота DH. K — середина отрезка CH. BM — медиана боковой грани BCD.

а) Докажите, что угол между DH и BM равен углу BMK.

б) Найдите угол между DH и BM.

10. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$.

а) Докажите, что угол между прямыми SB и CD равен углу SBE.

б) Если стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.

11. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ проведена высота PH. N — середина отрезка AH, M — середина ребра AP.

а) Докажите, что угол между прямыми PH и BM равен углу BMN.

б) Длины всех ребер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM.

12. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 1.

а) Докажите, что $AC_1 \perp BE$.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

14. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка H — центр грани ABC, а точка M — середина ребра CD.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми DH и BM.

15. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Известно, что $AD : BC = 2 : 1$ и $AB = BC$.

а) Докажите, что прямые DB_1 и A_1B_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми CD_1 и DB_1, если боковая грань AA_1D_1D — квадрат.

16. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B. Точки M и N — середины рёбер AD и BC соответственно.

а) Докажите, что MN является биссектрисой угла BMC.

б) Найдите угол между прямыми BD и MN, если $BD = 6\sqrt{2}$, $AC = 16$.

17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S в грани SBC проведена высота SH, а в грани SEF проведена высота SK.

а) Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SHK.

б) Найдите угол между прямыми BE и SH, если $SA = 13$, а $BC = 10$.

18. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости, проходящей через середину ребра AB и ребро DC.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD, если $AB = 6\sqrt{3}$, $AD = 5\sqrt{3}$.

19. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $BC = 5$ и $AB = AA_1 = 8$, M и N — середины ребер CD и AA_1 соответственно. Плоскость α проходит через точки M и B и параллельна прямой CD_1.

а) Докажите, что прямая DN параллельна плоскости α.

б) Найдите расстояние между прямыми C_1D и BD_1.

20. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро $SA = 5$, а высота $SO = \sqrt{15}$. Точки M и N — середины ребер CD и AB соответственно. Точка N — вершина пирамиды $NSCD$, NT — ее высота.

а) Докажите, что точка T делит SM пополам.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

21. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены середины P и E отрезков AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1E и CP перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1E = 5\sqrt{5}$?

22. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = \sqrt{23}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{15}$, $SB = \sqrt{85}$ и $SD = \sqrt{83}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

23. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = \sqrt{14}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 4\sqrt{3}$, $SB = 2\sqrt{21}$ и $SD = \sqrt{62}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

24. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точка K лежит на ребре SC и делит его в отношении 1 : 3, считая от вершины. Точка M — середина AS. Через MK проведено сечение, параллельное прямой DC.

а) Докажите, что сечение является равнобедренной трапецией.

б) Найдите угол между прямыми MK и DC, если $SA = AB = 16$.

25. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали пересекаются в точке O. Точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точку O параллельно прямым B_1M и C_1N, делит ребро BB_1 в отношении 1 : 1.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α, если $AB = 6$, $BC = 4$ и $AA_1 = 3$.

26. Дана пирамида $SABC$, в которой $AB = AC = SB = SC = 17$ и $BC = SA = 16$. Точки M и N — середины ребер BC и SA.

а) Докажите, что отрезок MN является общим перпендикуляром к прямым BC и SA.

б) Найдите объем пирамиды $ABMN$.

27. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 12$, а высота равна 3. На ребрах AB, CD, AS отмечены точки E, F и K соответственно, причем $AE = DF = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости KEF и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.