

1. Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна 1.  $M$  — середина ребра  $BC$ ,  $L$  — середина ребра  $AB$ .
- а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой  $CL$  и содержащая прямую  $DM$ , делит ребро  $AB$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $A$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $DM$  и  $CL$ .
2. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  сторона основания равна 8. Точка  $L$  — середина ребра  $SC$ . Тангенс угла между прямыми  $BL$  и  $SA$  равен  $2\sqrt{\frac{2}{5}}$ .
- а) Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые  $BO$  и  $LO$  перпендикулярны.
- б) Найдите площадь поверхности пирамиды.
3. Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 8. Высота этой призмы равна 6.
- а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AB_1$  и параллельная прямой  $CA_1$  проходит через середину ребра  $BC$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ .
4. В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ , равной  $8\sqrt{2}$ . Высота призмы равна 6.
- а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AC_1$  и параллельная прямой  $CB_1$  проходит через середину ребра  $A_1B_1$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $CB_1$ .
5. В пирамиде  $DABC$  прямые, содержащие ребра  $DC$  и  $AB$ , перпендикулярны.
- а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку  $E$  — середину ребра  $DB$ , и параллельно  $DC$  и  $AB$ . Докажите, что полученное сечение является прямоугольником.
- б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если  $DC = 24$ ,  $AB = 10$ .
6. Точка  $E$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
- а) Докажите, что угол между прямыми  $BE$  и  $AD$  равен углу  $CBE$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AD$ .
7. На ребре  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $CE : EC_1 = 1 : 2$ .
- а) Пусть точка  $F$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $B_1$ . Докажите, что угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$  равен углу  $AC_1 F$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$ .
8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равно 6, а косинус угла  $ASB$  при вершине боковой грани равен  $\frac{1}{9}$ . Точка  $M$  — середина ребра  $SC$ , точка  $N$  — середина ребра  $AC$ .
- а) Докажите, что угол между прямыми  $BM$  и  $SA$  либо равен углу  $BMN$ , либо дополняет его до  $180^\circ$ .
- б) Найдите косинус угла между прямыми  $BM$  и  $SA$ .
9. В правильном тетраэдре  $ABCD$  проведена высота  $DH$ .  $K$  — середина отрезка  $CH$ .  $BM$  — медиана боковой грани  $BCD$ .
- а) Докажите, что угол между  $DH$  и  $BM$  равен углу  $BMK$ .
- б) Найдите угол между  $DH$  и  $BM$ .
10. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ .
- а) Докажите, что угол между прямыми  $SB$  и  $CD$  равен углу  $SBE$ .
- б) Если стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми  $SB$  и  $CD$ .
11. В правильной четырёхугольной пирамиде  $PABCD$  проведена высота  $PH$ .  $N$  — середина отрезка  $AH$ ,  $M$  — середина ребра  $AP$ .
- а) Докажите, что угол между прямыми  $PH$  и  $BM$  равен углу  $BMN$ .
- б) Длины всех рёбер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол между прямыми  $PH$  и  $BM$ .
12. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра которой равны 1.
- а) Докажите, что  $AC_1 \perp BE$ .
- б) Найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .
13. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 1.
- а) Докажите, что прямая  $AB_1$  параллельна прямой, проходящей через середины отрезков  $AC$  и  $BC_1$ .
- б) Найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .
14. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $H$  — центр грани  $ABC$ , а точка  $M$  — середина ребра  $CD$ .
- а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми  $DH$  и  $BM$ .
15. В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Известно, что  $AD : BC = 2 : 1$  и  $AB = BC$ .
- а) Докажите, что прямые  $DB_1$  и  $A_1B_1$  перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми  $CD_1$  и  $DB_1$ , если боковая грань  $AA_1D_1D$  — квадрат.

16. Основание пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $BC$  соответственно.
- Докажите, что  $MN$  является биссектрисой угла  $BMC$ .
  - Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $MN$ , если  $BD = 6\sqrt{2}$ ,  $AC = 16$ .
17. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  в грани  $SBC$  проведена высота  $SH$ , а в грани  $SEF$  проведена высота  $SK$ .
- Докажите, что прямая  $AD$  перпендикулярна плоскости  $SHK$ .
  - Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $SH$ , если  $SA = 13$ , а  $BC = 10$ .
18. В основании пирамиды  $ABCD$  лежит правильный треугольник  $ABC$ . Все боковые ребра наклонены к основанию под одним и тем же углом.
- Докажите, что прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости, проходящей через середину ребра  $AB$  и ребро  $DC$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $AB = 6\sqrt{3}$ ,  $AD = 5\sqrt{3}$ .
19. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны ребра  $BC = 5$  и  $AB = AA_1 = 8$ ,  $M$  и  $N$  — середины ребер  $CD$  и  $AA_1$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $B$  и параллельна прямой  $CD_1$ .
- Докажите, что прямая  $DN$  параллельна плоскости  $\alpha$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $C_1D$  и  $BD_1$ .
20. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  боковое ребро  $SA = 5$ , а высота  $SO = \sqrt{15}$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $CD$  и  $AB$  соответственно. Точка  $N$  — вершина пирамиды  $NSCD$ ,  $NT$  — ее высота.
- Докажите, что точка  $T$  делит  $SM$  пополам.
  - Найдите расстояние между прямыми  $NT$  и  $SC$ .
21. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечены середины  $P$  и  $E$  отрезков  $AB$  и  $AD$  соответственно.
- Докажите, что прямые  $B_1E$  и  $CP$  перпендикулярны.
  - Найдите расстояние между этими прямыми, если  $B_1E = 5\sqrt{5}$ ?
22. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 5$  и  $BC = \sqrt{23}$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 2\sqrt{15}$ ,  $SB = \sqrt{85}$  и  $SD = \sqrt{83}$ .
- Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды  $SABCD$ .
  - Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .
23. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 6$  и  $BC = \sqrt{14}$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = 4\sqrt{3}$ ,  $SB = 2\sqrt{21}$  и  $SD = \sqrt{62}$ .
- Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды  $SABCD$ .
  - Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .
24. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  точка  $K$  лежит на ребре  $SC$  и делит его в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины. Точка  $M$  — середина  $AS$ . Через  $MK$  проведено сечение, параллельное прямой  $DC$ .
- Докажите, что сечение является равнобедренной трапецией.
  - Найдите угол между прямыми  $MK$  и  $DC$ , если  $SA = AB = 16$ .
25. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $BC$  соответственно.
- Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через точку  $O$  параллельно прямым  $B_1M$  и  $C_1N$ , делит ребро  $BB_1$  в отношении  $1 : 1$ .
  - Найдите расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $\alpha$ , если  $AB = 6$ ,  $BC = 4$  и  $AA_1 = 3$ .
26. Дана пирамида  $SABC$ , в которой  $AB = AC = SB = SC = 17$  и  $BC = SA = 16$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $BC$  и  $SA$ .
- Докажите, что отрезок  $MN$  является общим перпендикуляром к прямым  $BC$  и  $SA$ .
  - Найдите объем пирамиды  $ABMN$ .
27. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AD = 12$ , а высота равна 3. На ребрах  $AB$ ,  $CD$ ,  $AS$  отмечены точки  $E$ ,  $F$  и  $K$  соответственно, причем  $AE = DF = 4$  и  $AK = 3$ .
- Докажите, что плоскости  $KEF$  и  $SBC$  параллельны.
  - Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости  $SBC$ .