

1. а) Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что все грани тетраэдра  $ACB_1 D_1$  — равные треугольники (тетраэдр, обладающий таким свойством, называют *равногранным*).  
 б) В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостью  $A_1 BC$  и прямой  $BC_1$ , если  $AA_1 = 8$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 15$ .
2. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  известны рёбра:  $AB = 21\sqrt{3}$ ,  $SC = 29$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AS$  и  $BC$  соответственно.  
 а) Докажите что отрезок  $MN$  делится пополам высотой пирамиды, проведенной из вершины  $S$ .  
 б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой  $MN$ .
3. Основанием прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ , где  $AB = AC = 5$  и  $BC = 8$ . Высота призмы равна 3.  
 а) Докажите, что треугольник  $A_1 BC$  остроугольный.  
 б) Найдите угол между прямой  $A_1 B$  и плоскостью  $BCC_1$ .
4. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 3$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{11}$ ,  $SB = 3\sqrt{3}$ ,  $SD = 2\sqrt{5}$ .  
 а) Докажите, что  $SA$  — высота пирамиды.  
 б) Найдите угол между прямой  $SC$  и плоскостью  $ASB$ .
5. а) Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что все грани тетраэдра  $ACB_1 D_1$  — равные треугольники (тетраэдр, обладающий таким свойством, называют *равногранным*).  
 б) В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AA_1 = 4$ ,  $A_1 D_1 = 6$ ,  $C_1 D_1 = 6$ , найдите тангенс угла между плоскостью  $ADD_1$  и прямой  $EF$ , проходящей через середины рёбер  $AB$  и  $B_1 C_1$ .
6. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  известны рёбра  $AB = 7\sqrt{3}$ ,  $SC = 25$ .  $M$  — середина ребра  $SA$ .  
 а) Докажите, что проекции точек  $S$  и  $M$  на плоскость основания делят высоту  $AN$  треугольника  $ABC$  на три равные части.  
 б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой  $MN$ .
7. Основанием прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 8$ . Высота призмы равна 3. Точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ .  
 а) Докажите, что плоскость  $BA_1 M$  перпендикулярна плоскости  $BCC_1$ .  
 б) Найдите угол между прямой  $A_1 B$  и плоскостью  $BCC_1$ .
8. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны  $AB = 2$ ,  $AD = AA_1 = 1$ .  
 а) Пусть  $B_1 E$  — высота треугольника  $BB_1 C_1$ . Докажите, что  $AE$  — проекция  $AB_1$  на плоскость  $ABC_1$ .  
 б) Найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .
9. а) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде  $SABC$ , где  $S$  — вершина пирамиды, прямая  $SC$  перпендикулярна прямой  $AB$ .  
 б) Пусть высота  $SO$  составляет  $\frac{5}{7}$  от высоты  $SM$  боковой грани  $SAB$ . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.
10. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$  все рёбра равны 1.  
 а) Докажите, что  $AC'$  перпендикулярна прямой  $BE$ .  
 б) Найдите угол между прямой  $AC'$  и плоскостью  $ACD'$ .
11. В правильном тетраэдре  $ABCD$   $M$  — середина ребра  $AD$ .  
 а) Докажите, что проекция точки  $M$  на плоскость  $BCD$  делит высоту  $DN$  треугольника  $BCD$  в отношении 1 : 2, считая от вершины  $D$ .  
 б) Найдите угол между медианой  $BM$  грани  $ABD$  и плоскостью  $BCD$ .
12. Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды  $PABCD$  с вершиной  $P$  равны между собой. Точка  $M$  — середина бокового ребра пирамиды  $AP$ .  
 а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $B$  и  $M$  и перпендикулярная плоскости  $BDP$ , делит высоту пирамиды пополам.  
 б) Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью  $BDP$ .
13. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  известны рёбра:  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 4$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ .  
 а) Докажите, что прямые  $B_1 C$  и  $C_1 M$  перпендикулярны.  
 б) Найдите угол между прямой  $C_1 M$  и плоскостью грани  $ABB_1 A_1$ .
14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $MABCD$  лежит квадрат  $ABCD$ . Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер  $MA$  и  $MB$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная ребру  $MC$ .  
 а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна ребру  $MD$ .  
 б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и прямой  $AC$ .

15. Дана пирамида  $SABC$ , в которой  $SC = SB = \sqrt{17}$ ,  $AB = AC = \sqrt{29}$ ,  $SA = BC = 2\sqrt{5}$ .

- а) Докажите, что ребро  $SA$  перпендикулярно ребру  $BC$ .
- б) Найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBC$ .

16. В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Точка  $K$  — середина ребра  $A_1B_1$ , а точка  $M$  делит ребро  $AC$  в отношении  $AM : MC = 1 : 3$ .

- а) Докажите, что  $KM$  перпендикулярно  $AC$ .
- б) Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABC$ , если  $AB = 12$ ,  $AC = 16$  и  $AA_1 = 6$ .

17. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ , а точка  $O$  — точка пересечения диагоналей боковой грани  $ABB_1A_1$ .

- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $AMB$ , лежит на отрезке  $OC_1$ .
- б) Найдите угол между прямой  $OC_1$  и плоскостью  $AMB$ .

18. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB = 6\sqrt{3}$ . На ребре  $BC$  отмечена точка  $M$  так, что  $BC : MC = 3 : 1$ , а на ребре  $AC$  отмечена точка  $N$  так, что  $AN : NC = 2 : 1$ . Точка  $K$  — середина ребра  $AB$ , точка  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .

- а) Докажите, что прямая  $OK$  параллельна плоскости  $MNC_1$ .
- б) Найдите угол между прямой  $OK$  и плоскостью основания, если площадь треугольника  $MNC_1$  равна  $6\sqrt{3}$ .

19. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $K$  — центр грани  $ABD$ , точка  $M$  — центр грани  $ACD$ .

- а) Докажите, что прямые  $BC$  и  $KM$  параллельны.
- б) Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABD$ .

20. В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с равными сторонами  $AB$  и  $BC$ . Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $A_1B_1$  и  $AC$  соответственно.

- а) Докажите, что  $KM = KB$ .
- б) Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABB_1$ , если  $AB = 8$ ,  $AC = 6$  и  $AA_1 = 3$ .

21. Основание  $ABCD$  призмы  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  — трапеция с основаниями  $AB = 2CD$ .

- а) Докажите, что плоскость  $BA_1D_1$  проходит через середину бокового ребра  $CC_1$ .
- б) Найдите угол между боковым ребром  $AA_1$  и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция  $ABCD$  прямоугольная с прямым углом при вершине  $B$ , а  $BC = CD$  и  $AA_1 = \sqrt{6}CD$ .

22. Точка  $M$  середина ребра  $AB$  правильного тетраэдра  $DABC$ .

- а) Докажите, что ортогональная проекция точки  $M$  на плоскость  $ACD$  лежит на медиане  $AP$  грани  $ACD$ .
- б) Найдите угол между прямой  $DM$  и плоскостью  $ACD$ .

23. В основании пирамиды  $SABCD$  лежит ромб  $ABCD$ , сторона которого равна 8, а угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ . Известно, что  $SA = 15$ ,  $SC = \sqrt{33}$  и, кроме того,  $SB = SD$ .

- а) Докажите, что  $SC$  — высота пирамиды.
- б) Найдите угол между плоскостью  $ASC$  и ребром  $SB$ .

24. На ребрах  $BS$  и  $CS$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  со стороной основания  $AD = 10$  и боковым ребром  $SA = 5\sqrt{6}$  взяты точки  $K$  и  $M$  соответственно так, что  $SK : BK = CM : SM = 3 : 2$ .

- а) Докажите, что прямые  $KM$  и  $SC$  взаимно перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью основания пирамиды.

25. Точка  $O$  — точка пересечения диагоналей грани  $CDD_1C_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ . Плоскость  $DA_1C_1$  пересекает диагональ  $BD_1$  в точке  $F$ .

- а) Докажите, что  $BF : FD_1 = A_1F : FO$ .
- б) Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $AA_1$  соответственно. Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $DA_1C_1$ .

26. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно 4. Через точку  $A$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная прямой  $DC_1$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $1 : 3$ , считая от точки  $D$ .
- б) Найдите угол между прямой  $F_1D$  и плоскостью  $\alpha$ .

27. Точка  $O$  — центр грани  $A_1B_1C_1D_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ . Сечения параллелепипеда плоскостями  $AOB$  и  $BOC$  являются прямоугольниками, стороны  $AB$  и  $BC$  этих сечений в 3 раза меньше соответственных больших сторон сечений.

- а) Докажите, что  $ABCD$  — квадрат.
- б) Найдите угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $BOC$ .

28. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  известны углы:  $\angle C_1AA_1 = \alpha$ ,  $\angle C_1AB = \beta$ ,  $\angle C_1AD = \gamma$ .

- а) Докажите, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .
- б) Найдите угол между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $A_1B_1C_1$ , если  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ .

