

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .
- Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
 - Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.
2. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и $A_1 C_1$ соответственно.
- Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 - Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .
3. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причём $BE = 1$.
- Постройте сечение призмы плоскостью $A_1 C_1 E$.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SB . Кроме того известно, что $SC = 6$, $BC = 4$.
- Докажите, что BMC — равнобедренный, остроугольный треугольник.
 - Найдите угол между плоскостями CMK и ABC .
5. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.
- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.
 - Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SC .
- Докажите, что прямые SB и MK перпендикулярны.
 - Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 8$, $SC = 6$.
7. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.
- В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 ?
 - Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.
8. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
9. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .
10. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка F середина ребра AB , а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE : ED_1 = 6 : 1$. Через точки F и E проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая диагональ $B_1 D$ в точке O .
- Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO : OB_1 = 2 : 3$.
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.
11. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$.
- Докажите, что расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно расстоянию между прямыми $A_1 D_1$ и BD .
 - Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 13.
12. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.
- Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
 - Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.
13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P , а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q , причём $AP = BQ = SA$.
- Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.
 - Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ .
14. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.
- Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.
 - Найдите угол между плоскостями KBA_1 и BCC_1 .

15. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.
- Докажите, что точки A и C_1 равноудалены от плоскости BED_1 .
 - Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .
16. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$.
- Докажите, что объём пирамиды $A_1 BCC_1 B_1$ вдвое больше объёма пирамиды $AA_1 BC$.
 - Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.
17. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1.
- Докажите, что прямые SB и SD перпендикулярны.
 - Найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD .
18. Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 и $\angle A = 120^\circ$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания.
- Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.
 - Докажите, что радиус основания цилиндра больше, чем AB .
19. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$.
- Докажите, что объём пирамиды делится плоскостью MKC в отношении $5 : 1$.
 - Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK . Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.
20. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .
- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
 - Найдите угол между плоскостями α и SBC .
21. В треугольной пирамиде $SABC$ точка E — середина ребра SA , точка F — середина ребра SB , O — точка пересечения медиан треугольника ABC .
- Докажите, что плоскость CEF делит отрезок SO в отношении $3 : 2$, считая от вершины S .
 - Найдите косинус угла между плоскостями CEF и EFT , если точка T — середина SC , пирамида $SABC$ правильная, площадь треугольника ABC равна $27\sqrt{3}$, а $SB = 10$.
22. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Плоскость α параллельна прямой AC , проходит через точку B и середину высоты пирамиды.
- Докажите, что плоскость α делит ребро SD в отношении $2 : 1$, считая от точки D .
 - Найдите синус угла между плоскостью α и плоскостью ASC , если угол SAC равен 30° .
23. Точка O — центр грани $ABCD$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На рёбрах AD и $C_1 D_1$ отмечены соответственно точки M и N так, что $DM = D_1 N = AO$.
- Докажите, что прямая MN образует с плоскостью DCC_1 угол 30° .
 - Найдите угол между плоскостями MNO и DCC_1 .
24. Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно прямой BD_1 .
- Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и $B_1 D$.
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC , если объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен $48\sqrt{3}$, $AB = 2\sqrt{3}$ и $AD = 6$.
25. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ACC_1 .
26. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 5, боковые ребра равны 15, точка D — середина ребра CC_1 .
- Пусть прямые BD и $B_1 C_1$ пересекаются в точке E . Докажите, что угол $EA_1 B_1$ — прямой.
 - Найдите угол между плоскостями $A_1 B_1 C_1$ и BDA_1 .
27. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На ребрах AA_1 и $A_1 C_1$ выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = A_1 N = 2$.
- Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 - Найдите угол между плоскостями BMN и ACC_1 .

28. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной 8 на ребре AA_1 взята точка K такая, что $A_1 K = 1$. Через точки K и B_1 проведена плоскость α , параллельная прямой AC_1 .
- Докажите, что $A_1 P : PD_1 = 1 : 6$, где P — точка пересечения плоскости α и ребра $A_1 D_1$.
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ADD_1 .
29. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, $AB = 24$, высота SH , проведённая к основанию, равна 14, точка K — середина AS , точка N — середина BC . Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.
- Докажите, что PQ проходит через середину отрезка SN .
 - Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью APQ .
30. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AE = AL = 4$.
- Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.
 - Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .
31. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 4, боковые ребра равны 6. Точка M — середина ребра CC_1 , на ребре BB_1 отмечена точка N , такая, что $BN : NB_1 = 1 : 2$.
- Докажите, что плоскость AMN делит ребро DD_1 в отношении $1 : 5$, считая от точки D .
 - Найдите угол между плоскостями ABC и AMN .
32. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб с тупым углом B , равным 120° . Все ребра этой призмы равны 10. Точки P и K — середины рёбер CC_1 и CD соответственно.
- Докажите, что прямые PK и PB_1 взаимно перпендикулярны.
 - Найдите угол между плоскостями PKB_1 и $C_1 B_1 B$.
33. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка K является серединой ребра SD , а точка L — серединой стороны BC основания $ABCD$. Плоскость AKL пересекает ребро SC в точке N .
- Докажите, что $SN : NC = 2 : 1$.
 - Найдите угол между плоскостями AKL и ABC , если $AB = 10$, а высота пирамиды равна 20.
34. Трапеция $KLMN$ является основанием пирамиды $PKLMN$, $\angle KLM + \angle LMN = 270^\circ$, Q — точка пересечения прямых KL и MN . Плоскости KPL и PMN перпендикулярны плоскости основания пирамиды.
- Докажите, что плоскости KPL и PMN взаимно перпендикулярны.
 - Найдите площадь полной поверхности пирамиды $PLQM$, если $KL = LM = MN = 12$, а высота пирамиды $PKLMN$ равна 8.
35. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны. Точки M и N — середины рёбер SA и SC соответственно.
- В каком отношении плоскость BMN делит высоту SH пирамиды?
 - Найдите угол между плоскостью BMN и основанием пирамиды, если ребра пирамиды равны 12.
36. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC .
- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
 - Найдите угол между плоскостями α и SBC .
37. Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, точка K — середина ребра DD_1 .
- Доказать, что плоскость MCK параллельна прямой BD .
 - Найти тангенс угла между плоскостью MCK и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.
38. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M , N , K делят ребра AA_1 , BB_1 , DD_1 в отношении $1 : 4$, $1 : 5$, $1 : 3$, считая от нижнего основания $ABCD$.
- Докажите, что плоскость MNK делит ребро CC_1 в отношении $13 : 47$, считая от нижнего основания.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания равна $\sqrt{13}$, а высота равна 60.
39. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ ребра основания равны 4, а боковые рёбра равны 5. Точка K — середина ребра $B_1 C_1$, точка P лежит на ребре CC_1 так, что $C_1 P : PC = 1 : 4$.
- Докажите, что прямые AP и PK перпендикулярны
 - Найдите угол между плоскостями APK и CAA_1 .
40. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Через точку пересечения диагоналей грани $AA_1 B B_1$ и середину ребра CC_1 проходит плоскость α под углом 45° к плоскости основания призмы, пересекающая сторону BC .
- Докажите, что плоскость α проходит через середину M ребра BC .
 - Найдите угол между плоскостями α и $AB_1 M$.

41. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки K , L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.
- Докажите, что точка M — середина ребра $B_1 C_1$.
 - Найдите угол между плоскостями KLM и ABC , если площадь трапеции $KLMC$ равна 6.
42. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки K , L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 8.
- Докажите, что точка M — середина ребра $B_1 C_1$.
 - Найдите угол между плоскостями KLM и ABC , если площадь трапеции $KLMC$ равна $12\sqrt{2}$.
43. Точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые CM и DN пересекаются в точке O . Через центры граней $ABB_1 A_1$ и $BCC_1 B_1$ и точку O проходит плоскость α .
- Докажите, что плоскость α делит ребро AB куба в отношении 1 : 4, считая от точки A .
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC .
44. Основанием пирамиды с вершиной S является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD = 2BC$. Сечение пирамиды $SABCD$ проходит через точку B и является прямоугольником. Известно, что это сечение делит высоту пирамиды в отношении 2 : 1, считая от вершины S .
- Докажите, что высота пирамиды $SABCD$ проходит через середину высоты основания $ABCD$.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью боковой грани SAB , если плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом 15° , а одна из сторон сечения равна большему основанию трапеции $ABCD$.
45. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребрах AB , BC и SC отмечены точки K , L и M соответственно. Известно, что $AK : KB = BL : LC = 2 : 1$, $SM : MC = 7 : 1$.
- Докажите, что плоскость KLM проходит через середину ребра SD .
 - Найдите угол между плоскостью KLM и плоскостью основания пирамиды, если высота пирамиды равна диагонали основания.
46. В основании пирамиды $SABCD$ с равными боковыми ребрами лежит прямоугольник $ABCD$. Через точку пересечения медиан грани SBC и вершину A проходит плоскость α , параллельная ребру SD .
- Докажите, что плоскость α проходит через точку C .
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью SBC , если $BC : SB : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$.
47. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$ с острым углом A , равным 60° , а боковое ребро равно стороне основания. Через середины ребер $A_1 D_1$, $D_1 C_1$ и точку B проведена плоскость α .
- Найдите отношение площади сечения призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α к площади основания призмы.
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью DCC_1 .
48. У правильной шестиугольной пирамиды $ABCDEF S$ с вершиной S боковые ребра вдвое длиннее стороны основания. Точка N делит диагональ основания AD в отношении $AN : ND = 1 : 3$. Плоскость α проходит через точки E и N параллельно медиане боковой грани SCD , проведенной из точки C .
- Докажите, что плоскость α делит площадь боковой грани ASF в отношении 25 : 17.
 - Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC .
49. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 5$. Известно, что $AB = 5\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 16$.
- Докажите, что плоскость EFD_1 делит ребро $B_1 C_1$ на два равных отрезка.
 - Найдите угол между плоскостью EFD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.
50. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M , N и K делят ребра AA_1 , BB_1 , DD_1 в отношении 1 : 5, 1 : 4 и 1 : 2 соответственно, считая от нижнего основания $ABCD$.
- Докажите, что плоскость MNK делит ребро CC_1 в отношении 11 : 19, считая от нижнего основания.
 - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания призмы равна $\sqrt{13}$, а высота равна 30.
51. Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ параллельно основанию проведено сечение $A_1 B_1 C_1 D_1$, диагонали которого пересекаются в точке O_1 . На ребрах AD и SB отмечены точки K и M соответственно так, что $AK : KD = 3 : 5$, $SM : MB = 3 : 1$.
- Докажите, что плоскость KMO_1 параллельна SA .
 - Найдите угол между плоскостью KMO_1 и плоскостью ABC , если боковые ребра пирамиды $SABCD$ наклонены к плоскости основания под углом 60° .
52. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.
- Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.
 - Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

53. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK : KB = 3 : 1$. Точка L — середина ребра BC . Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что $MN \perp AB$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

54. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 2$. Точка T — середина ребра B_1C_1 .

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является трапецией.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$, если известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 4$, $AA_1 = 14$.

55. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ боковое ребро в два раза больше стороны основания. Плоскость α проходит через центр основания $ABCDEF$ перпендикулярно прямой BE_1 .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AA_1 в отношении $1 : 3$, считая от точки A .

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABB_1 .