1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

2. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

3. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Кроме того известно, что $SC = 6$, $BC = 4$.

а) Докажите, что BMC -- равнобедренный, остроугольный треугольник.

б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC.

5. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямые SB и MK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 8$, $SC = 6$.

7. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

8. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

9. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка F середина ребра AB, а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE : ED_1 = 6 : 1$. Через точки F и E проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая диагональ B_1D в точке O.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO : OB_1 = 2 : 3$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC), если дополнительно известно, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

11. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$.

а) Докажите, что расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между прямыми A_1D_1 и BD.

б) Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

12. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями KBA_1 и BCC_1.

15. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

а) Докажите, что точки A и C_1 равноудалены от плоскости BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

16. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$.

а) Докажите, что объем пирамиды $A_1BCC_1B_1$ вдвое больше объема пирамиды AA_1BC.

б) Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что прямые SB и SD перпендикулярны.

б) Найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

18. Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 и $\angle A = 120°$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания.

а) Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

б) Докажите, что радиус основания цилиндра больше, чем AB.

19. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$.

а) Докажите, что объем пирамиды делится плоскостью MKC в отношении 5 : 1.

б) Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK. Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

20. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

21. В треугольной пирамиде $SABC$ точка E — середина ребра SA, точка F — середина ребра SB, O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

а) Докажите, что плоскость CEF делит отрезок SO в отношении 3 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите косинус угла между плоскостями CEF и EFT, если точка T — середина SC, пирамида $SABC$ правильная, площадь треугольника ABC равна $27\sqrt{3}$, а $SB = 10$.

22. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Плоскость α параллельна прямой AC, проходит через точку B и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SD в отношении 2 : 1, считая от точки D.

б) Найдите синус угла между плоскостью α и плоскостью ASC, если угол SAC равен 30°.

23. Точка O — центр грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На рёбрах AD и C_1D_1 отмечены соответственно точки M и N так, что $DM = D_1N = AO$.

а) Докажите, что прямая MN образует с плоскостью DCC_1 угол 30°.

б) Найдите угол между плоскостями MNO и DCC_1.

24. Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $48\sqrt{3}$, $AB = 2\sqrt{3}$ и $AD = 6$.

25. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ACC_1.

26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые ребра равны 15, точка D — середина ребра CC_1.

а) Пусть прямые BD и B_1C_1 пересекаются в точке E. Докажите, что угол EA_1B_1 — прямой.

б) Найдите угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и BDA_1.

27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На ребрах AA_1 и A_1C_1 выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = A_1N = 2$.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ACC_1.

28. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 8 на ребре AA_1 взята точка K такая, что $A_1K = 1$. Через точки K и B_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC_1.

а) Докажите, что $A_1P : PD_1 = 1 : 6$, где P — точка пересечения плоскости α и ребра A_1D_1.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ADD_1.

29. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, $AB = 24$, высота SH, проведённая к основанию, равна 14, точка K — середина AS, точка N — середина BC. Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что PQ проходит через середину отрезка SN.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью APQ.

30. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AE = AL = 4$.

а) Докажите, что отрезок DE содержит центр основания пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

31. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 4, боковые ребра равны 6. Точка M — середина ребра CC_1, на ребре BB_1 отмечена точка N, такая, что $BN : NB_1 = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость AMN делит ребро DD_1 в отношении 1 : 5, считая от точки D.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и AMN.

32. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб с тупым углом B, равным 120°. Все ребра этой призмы равны 10. Точки P и K — середины ребер CC_1 и CD соответственно.

а) Докажите, что прямые PK и PB_1 взаимно перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями PKB_1 и C_1B_1B.

33. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка K является серединой ребра SD, а точка L — серединой стороны BC основания $ABCD$. Плоскость AKL пересекает ребро SC в точке N.

а) Докажите, что $SN : NC = 2 : 1$.

б) Найдите угол между плоскостями AKL и ABC, если $AB = 10$, а высота пирамиды равна 20.

34. Трапеция $KLMN$ является основанием пирамиды $PKLMN$, $\angle KLM + \angle LMN = 270^\circ$, Q — точка пересечения прямых KL и MN. Плоскости KPL и PMN перпендикулярны плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскости KPL и PMN взаимно перпендикулярны.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды $PLQM$, если $KL = LM = MN = 12$, а высота пирамиды $PKLMN$ равна 8.

35. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны. Точки M и N — середины ребер SA и SC соответственно.

а) В каком отношении плоскость BMN делит высоту SH пирамиды?

б) Найдите угол между плоскостью BMN и основанием пирамиды, если ребра пирамиды равны 12.

36. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

37. Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K — середина ребра DD_1.

а) Доказать, что плоскость MCK параллельна прямой BD.

б) Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.

38. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, K делят ребра AA_1, BB_1, DD_1 в отношении 1 : 4, 1 : 5, 1 : 3, считая от нижнего основания $ABCD$.

а) Докажите, что плоскость MNK делит ребро CC_1 в отношении 13 : 47, считая от нижнего основания.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания равна $\sqrt{13}$, а высота равна 60.

39. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребра основания равны 4, а боковые рёбра равны 5. Точка K — середина ребра B_1C_1, точка P лежит на ребре CC_1 так, что $C_1P : PC = 1 : 4$.

а) Докажите, что прямые AP и PK перпендикулярны

б) Найдите угол между плоскостями APK и CAA_1.

40. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Через точку пересечения диагоналей грани AA_1BB_1 и середину ребра CC_1 проходит плоскость α под углом 45° к плоскости основания призмы, *пересекающая сторону BC*.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину M ребра BC.

б) Найдите угол между плоскостями α и AB_1M.

41. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки K, L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M — середина ребра B_1C_1.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC, если площадь трапеции $KLMC$ равна 6.

42. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки K, L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 8.

а) Докажите, что точка M — середина ребра B_1C_1.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC, если площадь трапеции $KLMC$ равна $12\sqrt{2}$.

43. Точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые CM и DN пересекаются в точке O. Через центры граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 и точку O проходит плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB куба в отношении 1 : 4, считая от точки A.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

44. Основанием пирамиды с вершиной S является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD = 2BC$. Сечение пирамиды $SABCD$ проходит через точку B и является прямоугольником. Известно, что это сечение делит высоту пирамиды в отношении 2 : 1, считая от вершины S.

а) Докажите, что высота пирамиды $SABCD$ проходит через середину высоты основания $ABCD$.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью боковой грани SAB, если плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом 15°, а одна из сторон сечения равна большему основанию трапеции $ABCD$.

45. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребрах AB, BC и SC отмечены точки K, L и M соответственно. Известно, что $AK : KB = BL : LC = 2 : 1$, $SM : MC = 7 : 1$.

а) Докажите, что плоскость KLM проходит через середину ребра SD.

б) Найдите угол между плоскостью KLM и плоскостью основания пирамиды, если высота пирамиды равна диагонали основания.

46. В основании пирамиды $SABCD$ с равными боковыми ребрами лежит прямоугольник $ABCD$. Через точку пересечения медиан грани SBC и вершину A проходит плоскость α, параллельная ребру SD.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку C.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью SBC, если $BC : SB : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$.

47. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$ с острым углом A, равным 60°, а боковое ребро равно стороне основания. Через середины ребер A_1D_1, D_1C_1 и точку B проведена плоскость α.

а) Найдите отношение площади сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α к площади основания призмы.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью DCC_1.

48. У правильной шестиугольной пирамиды $ABCDEFS$ с вершиной S боковые ребра вдвое длиннее стороны основания. Точка N делит диагональ основания AD в отношении $AN : ND = 1 : 3$. Плоскость α приходит через точки E и N параллельно медиане боковой грани SCD, проведенной из точки C.

а) Докажите, что плоскость α делит площадь боковой грани ASF в отношении 25 : 17.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

49. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 3 : 5$. Известно, что $AB = 5\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFD_1 делит ребро B_1C_1 на два равных отрезка.

б) Найдите угол между плоскостью EFD_1 и плоскостью AA_1B_1.

50. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ точки M, N и K делят ребра AA_1, BB_1, DD_1 в отношении 1 : 5, 1 : 4 и 1 : 2 соответственно, считая от нижнего основания $ABCD$.

а) Докажите, что плоскость MNK делит ребро CC_1 в отношении 11 : 19, считая от нижнего основания.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания призмы равна $\sqrt{13}$, а высота равна 30.

51. Через середину высоты правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ параллельно основанию проведено сечение $A_1B_1C_1D_1$, диагонали которого пересекаются в точке O_1. На ребрах AD и SB отмечены точки K и M соответственно так, что $AK : KD = 3 : 5$, $SM : MB = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость KMO_1 параллельна SA.

б) Найдите угол между плоскостью KMO_1 и плоскостью ABC, если боковые ребра пирамиды $SABCD$ наклонены к плоскости основания под углом 60°.

52. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.

а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.

б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

53. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK : KB = 3 : 1$. Точка L — середина ребра BC. Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что $MN \perp AB$.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

54. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 2$. Точка T — середина ребра B_1C_1

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является трапецией.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$, если известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 4$, $AA_1 = 14$.

55. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ боковое ребро в два раза больше стороны основания. Плоскость α проходит через центр основания $ABCDEF$ перпендикулярно прямой BE_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AA_1 в отношении 1 : 3, считая от точки A.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABB_1.

56. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M — середина SD, точка K — середина SA.

а) Докажите, что прямые BK и CM лежат в одной плоскости α.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды равен 60° и $AB = 6$.

57. В правильном тетраэдре $ABCD$ все ребра равны 10. На ребрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AK = 6$.

а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как 16 : 9.

б) Найдите косинус угла между плоскостью CBD и плоскостью CMK.