1. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что высота этой пирамиды равна диагонали её основания.

б) Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

2. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64.

а) Докажите, что боковое ребро этой пирамиды больше, чем сторона основания.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC.

а) Докажите, что $AM = AB$.

б) Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B, равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найдите площадь сечения.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

6. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 10. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AE = LM = 4$.

а) Докажите, что объем пирамиды $LADE$ составляет $\frac{4}{15}$ от объема пирамиды $MABC$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

7. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = LM = 2$.

а) Докажите, что объем пирамиды $LADE$ составляет $\frac{1}{3}$ от объема пирамиды $MABC$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

8. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9.

Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

9. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 9, а боковые рёбра равны 15.

а) Докажите, что сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и BC параллельно прямой MB, является прямоугольником.

б) Найдите площадь этого сечения.

10. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 2 : 1, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

11. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16.

а) Докажите, что прямые MC и BD перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8.

а) Докажите, что плоскость, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC, делит ребро MC в отношении 2 : 1, считая от вершины M.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ провели сечение плоскостью, проходящей через сторону основания AB перпендикулярно ребру SC.

а) Докажите, что площадь этого сечения относится к площади основания так же, как высота пирамиды относится к её боковому ребру.

б) Найдите площадь сечения если боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA = 6$, а сторона основания $AB = 4$.

а) Докажите, что утроенный объем пирамиды $SABC$ равен произведению ребра SC на площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC.

б) Найдите площадь этого сечения.

15. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра — 10. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AE = LM = 4$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки E, D и L, проходит еще и через центр основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

16. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро $MA = 6$. На ребре AC находится точка D, на ребре AB — точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$, и $BE = 1$.

а) Докажите, что ADE — равносторонний треугольник.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

17. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины ребер AB и BC и вершину S.

а) Докажите, что указанное сечение делит объем пирамиды в отношении $1:7$.

б) Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.

18. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.

19. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 12. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении 2 : 1, считая от вершины M.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

20. В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

21. На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q, причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS.

а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна 6.

22. На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q, причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS.

а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна $6\sqrt{5}$.

23. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

24. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

25. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG : GB = AF : FC = 1 : 5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

26. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость α, перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как 1 : 3.

а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если боковое ребро пирамиды равно 4.

27. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 9$. Точка M — середина ребра AD. На ребре BC выбрана точка E так, что $CE = 3$, а на ребре AC выбрана точка F так, что $CF = 5$. Плоскость MEF пересекает ребро BD в точке N. Расстояние от точки M до прямой EF равно $\sqrt{34}$.

а) Докажите, что N — середина ребра BD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNF.

28. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и M — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой AD.

а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α — квадрат.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 2\sqrt{3}$.

29. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB, точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

30. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 7 : 3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости ABC.

а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

31. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 6$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 5$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 4 : 3$. Ребро $SA = 4\sqrt{3}$. Точки M и K принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости ABC.

а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

32. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S стороны основания равны 18, а боковые ребра — 15. Точка R принадлежит ребру SB, причем $SR : RB = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки C и R параллельно BD делит ребро SA пополам.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

33. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка N — середина ребра SC, точка L — середина ребра SA.

а) Докажите, что плоскость BNL делит ребро SD в отношении 1 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостями BNL и ABC, если пирамида правильная, $SA = 8$, а тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен $\frac{\sqrt{7}}{5}$.

34. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ через середины сторон AB и AD параллельно боковому ребру AM проведена плоскость. Сторона основания пирамиды равна 20, а боковое ребро — $20\sqrt{2}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды этой плоскостью является пятиугольником с тремя прямыми углами.

б) Найдите площадь этого сечения.

35. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 6, точка M — середина отрезка AS.

а) Докажите, что прямая AS перпендикулярна плоскости BMD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMD.

36. В правильной четырёхугольной пирамиде $FABCD$ с вершиной F сторона основания равна $9\sqrt{2}$, боковое ребро равно 15. Точка N делит высоту пирамиды в отношении 2 : 1, считая от вершины F. Через точки B и N параллельно прямой AC проведена плоскость γ, пересекающая ребро DF в точке M.

а) Докажите, что точка M — середина отрезка DF.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью γ.

37. Плоскость α проходит через середины двух противоположных ребер треугольной пирамиды и параллельна медиане одной из ее граней.

а) Докажите, что среди медиан граней этой пирамиды в точности две являются параллельными к плоскости α.

б) Найдите площадь сечения данной пирамиды плоскостью α, если эти медианы перпендикулярны друг другу и равны 2.

38. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно 12, а сторона основания AB равна 6. В боковых гранях SAB и SAD провели биссектрисы AL и AM соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью ALM делит ребро SC пополам.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью ALM.

39. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

40. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На ребрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причем $AM = 4$, $SK : KB = 1 : 3$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

41. Точка E лежит на высоте SO, а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8$, $SO = 14$.

42. В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра AB, а точка N расположена на ребре SC так, что $SN : NC = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскости SMC и ANB перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка MN, если длина ребра AB равна 8.

43. Точка E лежит на боковом ребре SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и делит его в отношении 1 : 2, считая от вершины S. Через точку E и середины сторон AB и AD проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении 3 : 2.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна 12, а высота — $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

44. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении 1 : 3, считая от вершины B.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

45. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N и пересекает ребра AS и CS в точках K и P соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямых MP и KN лежит на высоте пирамиды $SABC$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α, если известно, что $AB = 24$, $AS = 28$, $SK = 7$.

46. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α, если $AD = 10$, $BC = 8$, $SO = 8$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD.

47. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точка M — середина SA, на ребре SB отмечена точка N так, что $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью CMN, если все рёбра равны 12.

48. $SMNK$ — правильный тетраэдр. На ребре SK отмечена точка P такая, что $KP : PS = 1 : 3$, точка L — середина ребра MN.

а) Докажите, что плоскости SLK и MPN перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка PL, если длина ребра MN равна 4.

49. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка L — середина бокового ребра SB. На ребре SA взята точка K так, что $SK : KA = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость DKL параллельна боковому ребру SC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью DKL, если все ребра пирамиды равны 24.

50. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины ребер SA и SD и вершину C, делит высоту SH треугольника ASB в отношении 2 : 1, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины ребер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

51. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S каждое ребро равно $5\sqrt[4]{2}$. Через середины сторон AD и DC и середину высоты пирамиды проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру SD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

52. Основанием правильной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды, если $AB = 30$.

53. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ длины всех боковых ребер равны длине ребра AD, а длина каждого из рёбер AB, BC и CD ровно в два раза меньше, чем длина ребра AD.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину ребра AD.

б) Найдите, в каком отношении плоскость BMN делит высоту пирамиды, считая от вершины S, если точка M — середина ребра SD, а точка N делит ребро SC в отношении $SN : NC = 3 : 1$.

54. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость α, перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как 1 : 3.

а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если боковое ребро пирамиды равно 4.

55. В основании четырехугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD*. На ребрах *SA*, *SB*, *SC* и *SD* отмечены точки *L*, *K*, *N* и *M* соответственно так, что четырехугольник *KLMN* — трапеция с основаниями *KL* = 3 и *MN* = 2. Известно, что $SK : KB = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость *KLM* пересекает ребра *SC* и *SD* в их серединах.

б) Найдите высоту *SH* пирамиды, если точка пересечения диагоналей основания пирамиды совпадает с точкой *H*, площадь основания равна 24, а площадь сечения *KLMN* = 10.

56. В основании четырехугольной пирамиды *SABCD* лежит квадрат *ABCD*. Плоскость α пересекает ребра *SA*, *SB*, *SC* и *SD* в точках *L*, *K*, *N* и *M* соответственно, причем *SK* : *KB* = 3 : 1, а точки *L* и *M* — середины ребер *SA* и *SD*.

а) Докажите, что четырехугольник *KLMN* является трапецией, длины оснований которой относятся как 2 : 3.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями *ABC* и α равен 30°, площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $10\sqrt{2}$, а площадь основания пирамиды равна 32.

57. Грани *ABD* и *ACD* тетраэдра *ABCD* являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах *AB*, *AD* и *CD* отмечены точки *K*, *L* и *M* соответственно, причём *BK* = 2, *AL* = 4, *MD* = 3.

а) Докажите, что плоскость *KLM* перпендикулярна ребру *CD*.

б) Найдите длину отрезка пересечения грани *ABC* и плоскости *KLM*.

58. В пирамиде *ABCD* рёбра *DA*, *DB* и *DC* попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что *BD* = *CD*.

б) На рёбрах *DA* и *DC* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём *DM* : *MA* = *DN* : *NC* = 2 : 3. Найдите площадь сечения *MNB*.

59. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* (точка *S* — вершина, *BD* — диагональ основания) образует с основанием угол 60°, сторона основания равна 4,8. Через среднюю линию треугольника *ABD*, не пересекающую *BD* и точку на высоте пирамиды, отстоящей от основания на $\frac{1}{6}$ всей высоты пирамиды, проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру *SC*.

б) Найдите объем пирамиды *SKLM*, где *K*, *L* и *M* — точки пересечения α соответственно с ребрами *SB*, *SD* и *SC*.

60. На ребре *AB* правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* отмечена точка *Q*, причем $AQ : QB = 1 : 2$. Точка *P* — середина ребра *AS*.

а) Докажите, что плоскость *DPQ* перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения *DPQ*, если площадь сечения *DSB* равна 18.

61. На боковом ребре *FD* правильной четырехугольной пирамиды *FABCD* отмечена точка *M* так, что *FM* : *FD* = 2 : 5. Точки *P* и *Q* — середины ребер *AD* и *BC* соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MPQ* есть равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость *MPQ* разбивает пирамиду.

62. На ребрах *AB* и *BC* треугольной пирамиды *DABC* отмечены точки *M* и *N* так, что $AM : MB = CN : NB = 2 : 1$. Точки *P* и *Q* — середины ребер *DA* и *DC* соответственно.

а) Докажите, что точки *P*, *Q*, *M* и *N* лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость *PQM* делит пирамиду.

63. Точки *M* и *N* соответственно — середины ребер *AB* и *BC* правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* с вершиной *S*. Через точки *M* и *N* проведена плоскость α, которая пересекает ребра *AS* и *CS* в точках *P* и *Q* соответственно. Оказалось, что прямые *PM* и *QN* параллельны друг другу.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру *BS*.

б) Найдите площадь пятиугольника, который получается в сечении пирамиды *SABCD* плоскостью α, если известно, что *AB* = 16 и *BS* = 18.

64. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны. Через середины ребер *AB* и CC_1 проведена плоскость α. Тангенс угла наклона плоскости α к основанию равен $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

а) Докажите, что плоскость α делит одно из ребер основания $A_1B_1C_1$ пополам.

б) Найдите отношение объемов, на которые плоскость α делит призму $ABCA_1B_1C_1$.

65. В правильной треугольной пирамиде *SABC* стороны основания *ABC* равны 12, а боковые ребра — 25. На ребрах *AB*, *AC* и *SA* отмечены точки *F*, *E* и *K* соответственно. Известно, что *AE* = *AF* = 10, *AK* = 15.

а) Докажите, что объем пирамиды *KAEF* составляет $\frac{5}{12}$ от объема пирамиды *SABC*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью *KEF*.

66. Дана правильная пирамида $SABC$ с основанием ABC, точки K и M — середины рёбер AB и SC соответственно. Точки N и L на сторонах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $LA = 4SL$ и прямые NL и MK пересекаются.

а) Докажите, что прямые LK, MN и BS пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $CN : NB$.

67. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 10. Точка O — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O, пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN : ND = 2 : 3$.

а) Докажите, что точка M — середина ребра SC.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC.

68. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины ребер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K.

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна ребрам AB и CD.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если известно, что $BK = 1$ и $KC = 5$.

69. В пирамиде $SABC$ ребра SA, SB и SC попарно перпендикулярны, $AB = BC = AC = 4\sqrt{2}$.

а) Докажите, что $SB = SC$.

б) На ребрах SA и SC взяты точки K и L соответственно, причем $SK : KA = SL : LC = 3 : 4$. Найдите площадь сечения BKL.

70. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S на боковом ребре SE отмечена точка K такая, что $SK : KE = 2 : 3$.

а) Докажите, что плоскость ACK делит ребра SF и SD пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость ACK делит объем пирамиды $SABCDEF$.

71. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 6. Боковое ребро наклонено к основанию под углом 60°. Через меньшую диагональ основания AC проведено сечение, которое пересекает высоту пирамиды в точке, удаленной от основания на расстояние $\sqrt{3}$.

а) Докажите, что это сечение перпендикулярно противоположному к AC боковому ребру пирамиды SE.

б) Найдите площадь сечения.

72. В правильном тетраэдре $SNEG$ точки K и L — середины ребер NE и SG соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой KL и пересекает ребро EG в точке P.

а) Докажите, что прямая KL перпендикулярна ребрам NE и SG.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если известно, что $EP = 1$, $PG = 5$.

73. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На ребре AC отмечена точка M, а на продолжении ребра BC за точку C — точка N так, что $CM = CN = 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SNM является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью SNM.

74. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D.

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC, считая от вершины S, если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

75. Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K. Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $2\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC.

б) Найдите, в каком отношении точка K делит ребро SA, считая от точки S, если объём пирамиды равен $36\sqrt{6}$.

76. На ребрах BC, AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L, M и N соответственно. Известно, что $BL : LC = AM : MB = AN : ND = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точки L, M и N, делит ребро CD в отношении 2 : 1, считая от вершины C.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, если $AB = 6$.

77. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ через точку M на ребре AS параллельно плоскости SBD проведена плоскость α. Сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольным треугольником.

а) Докажите, что $\angle ASB = 60^\circ$.

б) Найдите отношение $SM : MA$, если объем пирамиды $SABCD$ равен 675, а объем пирамиды, отсекаемой плоскостью α от пирамиды $SABCD$, равен 100.

78. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K лежит на ребре CB, причем $CK : KB = 1 : 2$. Точка L лежит на ребре AB, причем $AL : LB = 1 : 3$. Через точки A и K параллельно DL проведена секущая плоскость..

а) Докажите, что сечением является равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь сечения, если ребра тетраэдра равны 1.

79. Все ребра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 16. Точка O — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SB и проходящая через точку O, пересекает рёбра SA и SD в точках K и L соответственно. Точка K делит ребро SA в отношении $SK : KA = 3 : 5$.

а) Докажите, что точка L — середина ребра SD.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OKL пересекает грань SCD.

80. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а высота пирамиды SO равна 6. На боковом ребре SC отмечена точка K так, что $SK : KC = 1 : 2$. Плоскость γ проходит через точки A и K параллельно диагонали основания BD.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью γ является четырехугольником, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

б) Найдите объем пирамиды, вершина которой — точка C, а основание — сечение данной пирамиды плоскостью γ.