

1. Окружности радиусов 2 и 3 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , вторично пересекает меньшую окружность в точке  $B$ , а большую — в точке  $C$ . Найдите площадь треугольника  $BCO_2$ , если  $\angle ABO_1 = 30^\circ$ .
2. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.
3. На стороне прямого угла с вершиной  $A$  взята точка  $O$ , причём  $AO = 7$ . С центром в точке  $O$  проведена окружность  $S$  радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности  $S$ .
4. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.
5. Центр  $O$  окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки  $O$  до вершины угла равно 10.
6. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведены диаметры  $AC$  и  $AD$  этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если  $BC = 7$ ,  $BD = 3$ .
7. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.
8. Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как  $2 : 5$ . Общая хорда имеет длину  $2\sqrt{3}$ , а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.
9. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются внешним образом в точке  $C$ ,  $AO_1$  и  $BO_2$  — параллельные радиусы этих окружностей, причём  $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$ . Найдите  $AB$ .
10. Радиусы окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно 1 и 3. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой  $O_1O_2$ , если  $O_1O_2 = 14$ .
11. Радиусы окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно 2 и 10. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой  $O_1O_2$ , если  $O_1O_2 = 28$ .
12. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются внешним образом в точке  $C$ ,  $AO_1$  и  $BO_2$  — параллельные радиусы этих окружностей, причём  $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$ . Найдите  $AB$ .
13. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются внутренним образом в точке  $K$ ,  $MO_1$  и  $NO_2$  — параллельные радиусы этих окружностей, причём  $\angle MO_1O_2 = 120^\circ$ . Найдите  $MN$ .
14. В окружности проведены хорды  $PQ$  и  $CD$ , причём  $PQ = PD = CD = 8$ ,  $CQ = 6$ . Найдите  $CP$ .
15. В окружности проведены хорды  $PQ$  и  $CD$ , причём  $PQ = PD = CD = 10$ ,  $CQ = 6$ . Найдите  $CP$ .
16. Две окружности, радиусы которых равны 9 и 4, касаются внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной.
17. Прямая касается окружностей радиусов  $R$  и  $r$  в точках  $A$  и  $B$ . Известно, что расстояние между центрами равно  $a$  причём  $r < R$  и  $r + R < a$ . Найдите  $AB$ .
18. Окружность  $S$  проходит через вершину  $C$  прямого угла и пересекает его стороны в точках, удаленных от вершины  $C$  на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающийся окружности  $S$ .
19. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.
20. Окружность радиуса  $6\sqrt{2}$  вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите  $MN$ .
21. Дана окружность радиуса 4 с центром в точке  $O$ , расположенной на биссектрисе угла, равного  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки  $O$  до вершины угла равно 10.
22. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности с центром  $O$  и радиусом 6, а точка  $C$  равноудалена от точек  $A$ ,  $B$  и  $O$ . Другая окружность с центром  $Q$  и радиусом 8 описана около треугольника  $ACO$ .  
 а) Докажите, что точка пересечения прямых  $AB$  и  $CQ$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $OCB$ .  
 б) Найдите длину отрезка  $QB$ .

23. Две окружности касаются внешним образом в точке  $A$ , через которую проведена их общая касательная, на которой отмечена точка  $B$ . Через точку  $B$  проведены две прямые: одна пересекает первую окружность в точках  $K$  и  $L$  (точка  $K$  находится между  $B$  и  $L$ ), а другая — вторую окружность в точках  $M$  и  $N$  (точка  $M$  находится между  $B$  и  $N$ ). Прямые  $KN$  и  $LM$  пересекаются в точке  $P$ .
- Докажите, что точки  $K, L, M, N$  лежат на одной окружности.
  - Найдите отношение площадей треугольников  $KLP$  и  $MNP$ , если  $BL = 9, BM = 5, AB = 6$ .