

1. Четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности и вписан в окружность. Прямые  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите площадь четырёхугольника, если известно, что  $\angle AMD = \alpha$  и радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $BCM$  и  $AMD$  равны соответственно  $r$  и  $R$ .
2. Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается биссектрисы угла  $D$  и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника  $ABOD$ .
3. Окружность  $S$  радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности  $S$ .
4. Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается биссектрисы угла  $D$  и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника  $ABOD$ .
5. В треугольнике  $ABC$   $AB = 13$ ,  $BC = 10$ ,  $CA = 7$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD : DC = 1 : 4$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .
6. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке  $O$ , отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите площадь четырёхугольника  $OMPN$ .
7. Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 7$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается биссектрисы угла  $D$  и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника  $ABOD$ .
8. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = 12$  и  $BC = 5$ . С центром в вершине  $B$  проведена окружность  $S$  радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол  $BAC$  и касающейся окружности  $S$ .
9. Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается биссектрисы угла  $D$  и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника  $ABOD$ .
10. В параллелограмме  $ABCD$  известны стороны  $AB = a$ ,  $BC = b$  и  $\angle BAD = \alpha$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $BCD$  и  $DAB$ .
11. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , вторично пересекает меньшую окружность в точке  $B$ , а большую — в точке  $C$ . Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, вершинами которого являются точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $B$  и  $C$ , если  $\angle ABO_1 = 15^\circ$ .
12. Четырёхугольник  $KLMN$  описан около окружности и вписан в окружность. Прямые  $KL$  и  $NM$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $KPN$ , если известно, что  $\angle KPN = \varphi$  и радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $KPN$  и  $LMP$  равны соответственно  $r$  и  $R$ .
13. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $BMC$ .
14. Боковые стороны  $KL$  и  $MN$  трапеции  $KLMN$  равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые  $KL$  и  $MN$  пересекаются в точке  $A$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ALM$ .
15. Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами:  $KN = 11$ ,  $MN = 8$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 4 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .
16. Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами:  $KN = 13$ ,  $MN = 6$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 3 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .
17. Дан ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 24$  и  $BD = 10$ . Проведена окружность радиуса  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину  $B$  касается этой окружности и пересекает прямую  $CD$  в точке  $M$ . Найдите  $CM$ .
18. Четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности и вписан в другую окружность. Прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите периметр треугольника  $ABM$ , если известно, что  $AB = a$  и  $CD = b$ .
19. В трапеции  $ABCD$  основания  $AD = 39$ ,  $BC = 26$ . Длины боковых сторон  $AB = 5$ ,  $CD = 12$ . Окружность проходит через точки  $A$  и  $B$  и касается прямой  $CD$ .
  - а) Докажите, что продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под прямым углом.
  - б) Найдите радиус окружности.
20. Окружность проходит через вершины  $C$  и  $D$  трапеции  $ABCD$ , касается боковой стороны  $AB$  в точке  $B$  и пересекает большее основание  $AD$  в точке  $K$ . Известно, что  $AB = 5\sqrt{3}$ ,  $BC = 5$ ,  $KD = 10$ .
  - а) Докажите, что  $BD = \sqrt{AD \cdot BC}$ .
  - б) Найдите радиус этой окружности.

**21.** В четырехугольнике  $ABCD$ , вписанном в окружность, биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $E$ , лежащей на стороне  $CD$ . Известно, что  $CD : BC = 3 : 1$ .

- А) Докажите, что точка  $E$  равноудалена от прямых  $AD$  и  $AB$ .
- Б) Найдите отношение площадей треугольников  $ADE$  и  $BCE$ .

**22.** Дан прямоугольник  $ABCD$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $BDC$ , касаются диагонали  $BD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , касаются диагонали  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно.

- а) Докажите, что  $MNKL$  — прямоугольник, подобный исходному.
- б) Найдите коэффициент подобия, если косинус угла между диагоналями исходного прямоугольника равен  $\frac{7}{25}$ .