1. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geqslant 3)$.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

2. Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{350}, \qquad S_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{350}^2, \qquad S_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_{350}^3,$$
$$S_4 = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 513$.
а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1097$ и $S_3 = 3243$.
б) Может ли $S_4 = 4547$?
в) Пусть $S_4 = 4745$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

3. В строку подряд написано 1000 чисел. Под каждым числом a первой строки напишем число, указывающее, сколько раз число a встречается в первой строке. Из полученной таким образом второй строки аналогично получаем третью: под каждым числом второй строки пишем, сколько раз оно встречается во второй строке. Затем из третьей строки так же получаем четвёртую, из четвёртой — пятую и так далее.
а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.
б) Докажите, что 11-я строка совпадает с 12-й.
в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строка не совпадает с 11-й.

4. Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4,… выделить арифметическую прогрессию
а) длиной 4;
б) длиной 5;
в) длиной k, где k — любое натуральное число?

5. Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.
а) Найдите этот закон.
б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).
в) Докажите, что число 21991 после нескольких переходов станет однозначным.

6. В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:
а) набор цифр 1234; 3269;
б) вторично набор 1975;
в) набор 8197?

7. Целые числа от 1 до n записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и записанного под ним есть точный квадрат
а) при $n = 9$,
б) при $n = 11$,
в) при $n = 1996$.

8. Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, …
а) Существует ли арифметическая прогрессия длины 5 составленная из членов этой последовательности?
б) Можно ли составить арифметическую прогрессию бесконечной длины из этих чисел?
в) Может ли в прогрессии быть 2013 членов?

9. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и
а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

10. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

11. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

12. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?
в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 235.

13. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geqslant 3)$.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?
в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 57.

14. Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.
а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?
б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?
в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$?

15. а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

16. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geqslant 3)$.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

17. Целое число S является суммой не менее трех последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.
а) Может ли S равняться 8?
б) Может ли S равняться 1?
в) Найдите все значения, которые может принимать S.

18. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний — 2076.
а) может ли в последовательности быть три члена?
б) может ли в последовательности быть четыре члена?
в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

19. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.
а) Может ли число S быть равным 38?
б) Может ли число S быть больше 37,05?
в) Найдите максимально возможное значение S.

20. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и
а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

21. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

22. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.
а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 100?
б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?
в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

23. В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.
а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?
б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?
в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

24. Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geqslant 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 40.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 6$?

25. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних стоящих рядом с ним членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

26. На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\dfrac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\dfrac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{A+B}{2}$.

27. На доске написано 24 числа: восемь «5», восемь «4» и восемь «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\dfrac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 12 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\dfrac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{A+B}{2}$.

28. Последовательность $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_7$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1{,}5$.

б) существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение M_3.

29. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

30. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

31. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

32. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 4a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $2a_n = 3a_2 - a_1$

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 315$?

33. Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leqslant 300$?

34. Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_6$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1 = 7,\ M_2 = 6.$

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6,4.$

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?

в) Найдите наименьшее возможное значение M_3.

35. На полиграфической фабрике страницы тетради пронумерованы числами от 1 до 96. На случайной странице Максим записал число 0 и пронумеровал все страницы далее до конца тетради числами 1, 2, 3,... и т. д., не пропуская ни одной. Затем он вернулся к странице с записанным 0 и пронумеровал страницы тетради назад числами −1, −2, −3, ... и т. д. до начала тетради без пропусков. Сумма всех записанных чисел в тетради равна S. Определите номер страницы фабричной нумерации, на которой Максим записал число 0, если:

а) $S = 48$;

б) $S = 4560$;

в) $S = 1968$

36. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

37. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right) a_n$?

38. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n может оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{5n}$?

39. Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

40. Вася и Петя решали задачи из сборника, причем каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя — на две задачи больше, чем в предыдущий. В первый день каждый решил хотя бы одну задачу, а в итоге каждый решил все задачи сборника.

а) Могло ли быть в сборнике 85 задач?

б) Могло ли быть в сборнике 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней?

в) Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

41. Вася и Петя решают задачи из сборника. Они начали решать задачи в один и тот же день, и решили в этот день хотя бы по одной задаче каждый. Вася решал в каждый следующий день на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя — на две задачи больше, чем предыдущий день. В итоге каждый из них решил все задачи из сборника.

а) Могло ли быть так, что в первый день они решили одинаковое число задач, при этом Петя прорешал весь сборник за пять дней?

б) Могло ли быть так, что в первый день они решили одинаковое число задач, при этом Петя прорешал весь сборник за десять дней?

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике, если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день Вася решил больше задач чем Петя, а за 7 дней Петя решил задач больше, чем Вася?

42. Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?

в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася?

43. Последовательность натуральных чисел (a_n) состоит из 400 членов. Каждый член последовательности, начиная со второго, либо вдвое больше предыдущего, либо на 98 меньше предыдущего.

а) Может ли последовательность (a_n) содержать ровно 5 различных чисел?

б) Чему может равняться a_1, если $a_{100} = 75$?

в) Какое наименьшее значение может принимать наибольший член последовательности (a_n)?

44. На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки + и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма:

$$1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147.$$

а) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?

б) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?

в) Чему могло равняться n, если полученная сумма чисел равна 150?

45. На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

а) Может ли сумма составлять 282?

б) Может ли их сумма составлять 390?

в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

46. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

47. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

48. На доске разрешается написать n таких ненулевых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, \ldots, n-1$ выполнено равенство $a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$.

а) Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_1 = a_4$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, сумма которых равна 2021?

в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа, сумма которых равна 11. Какое наименьшее значение может принимать сумма их квадратов?

49. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причем $a_1 > 4$ и $a_{n+1} = a_n + 4n^2$ для $n \geq 1$.

а) Могут ли a_2 и a_3 быть простыми числами?

б) Может ли сумма двух подряд идущих членов этой последовательности делиться на 4 нацело, если оба эти члена — простые числа?

в) Какое наибольшее количество подряд идущих членов этой последовательности (не обязательно с первого) могут быть простыми числами?

50. Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из трехзначных натуральных чисел, равен 272. Известно, что в прогрессии не меньше трех чисел.

а) Может ли число 425 являться членом такой прогрессии?

б) Может ли число 680 являться членом такой прогрессии?

в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

51. Рассматриваются непостоянные бесконечные арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, состоящие из натуральных чисел. Пусть S_n — сумма первых n членов, $S_1 = a_1$.

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия, что $S_6 = 1980$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 350$ и $S_{n+2} = 625$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для которых существует такая арифметическая прогрессия, что $S_n = 625$?

52. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ... a_n состоит из $n \geqslant 3$ различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $6a_{k+2} = 7a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 2$ выполняться равенство $5a_n = 6a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 404$?

53. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n, а через $a(n)$ — сумму квадратов цифр числа n.

а) Может ли $a(n)$ быть в 12 раз больше, чем $s(n)$?

б) У каких натуральных чисел n число $a(n)$ в 9 раз больше, чем $s(n)$?

в) Возьмем любое натуральное число m и составим бесконечную последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = m$ и $x_{n+1} = a(x_n)$ для всех $n \geqslant 1$. При каких m количество различных членов этой последовательности конечно?

54. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Обозначим $M_{<c}(a_n)$ среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые меньше некоторого числа C, которое больше наименьшего, но не больше наибольшего члена этой последовательности. Обозначим $M_{\geqslant C}(a_n)$ — среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые не меньше числа C. Среднее арифметическое одного числа равно самому числу. К каждому члену последовательности $\{a_n\}$ прибавили 4. Получилась новая последовательность, которую обозначим $\{a_n+4\}$.

а) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n+4) < M_{<79}(a_n)$?

б) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<79}(a_n+4) < M_{<79}(a_n)$ и $M_{\geqslant 79}(a_n+4) < M_{\geqslant 79}(a_n)$?

в) Известно, что среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, равняется 84, $M_{\geqslant 79}(a_n) = 94$, $M_{<79}(a_n) = 70$, $M_{\geqslant 79}(a_n+4) = 96$ и $M_{<79}(a_n+4) = 72$. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности $\{a_n\}$?

55. а) Первый член геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равен 5, и для всех членов выполняется условие $b_{n+2} = 7b_{n+1} - 12b_n$. В какой наименьшей арифметической прогрессии содержится эта геометрическая прогрессия?

б) Члены последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяют условию $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ и $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. При каких значениях n число a_n делится на 13?

в) Последовательности натуральных чисел $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ и $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Чему равно x_{20}?

56. Последовательность $\{a_n\}$ для всех натуральных $n \geqslant 1$ состоит из натуральных чисел и обладает следующим свойством: последовательность средних арифметических с общим членом

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

для $n \geqslant 1$ также состоит из натуральных чисел.

а) Найдите a_n, если $b_n = 2^n$ для всех $n \geqslant 1$.

б) Последовательность $\{b_n\}$ является периодической: все члены с нечетными номерами равны c, все члены с четными номерами равны $(c + 1)$, где c нечетное натуральное число. Найдите последние члены последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

в) Последовательность $\{b_n\}$ является убывающей арифметической прогрессией с первым членом 100 и разностью $d = -1$ и имеет наибольшее возможное число членов. Сколько членов в этой последовательности?

57. В бесконечной последовательности натуральных чисел $\{c_n\}$ числа, стоящие на нечетных местах, образуют арифметическую прогрессию $\{a_n\}$ с первым членом a и разностью $d > 0$, а числа, стоящие на четных местах, образуют арифметическую прогрессию $\{b_n\}$ с первым членом b и разностью $f > 0$, причем $a \neq b$ и $d \neq f$.

а) Могут ли в последовательности $\{c_n\}$ стоять подряд три одинаковых числа?

б) Какое максимальное количество пар соседних одинаковых чисел может быть в последовательности $\{c_n\}$?

в) Какое наименьшее количество чисел в последовательности $\{c_n\}$ может стоять между двумя парами соседних одинаковых чисел?

58. Бесконечная последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел задана рекуррентно: $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3, & \text{если число } n \text{ нечетное}, \\ a_n - 2, & \text{если число } n \text{ четное}. \end{cases}$$

а) Если в последовательности $\{a_n\}$ два элемента равны: $a_n = a_m$ при $m > n$, то чему равна разность $(m - n)$?

б) При каких значениях n сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ будет точным квадратом?

в) Если последняя цифра суммы S_n равна 6, то какая цифра будет предпоследней?

59. Бесконечная непостоянная арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ состоит из натуральных чисел.

а) Если $a_4 = 12$, может ли a_{42} делиться на 11?

б) Может ли быть $a_1 = 13$, если a_{73} и a_{95} делятся на 9?

в) Первый член прогрессии $\{a_n\}$ делится без остатка на 19, второй — на 23, третий — на 31. Чему равна наименьшая возможная разность d этой прогрессии? Найдите наименьшее возможное значение a_5 при наименьшем возможном значении d.

60. а) При подготовке к ЕГЭ по математике Петя решил прорешать все задачи из сборника прошлого года, начиная с самых простых и кончая самыми сложными. В понедельник он решил половину всех задач и еще одну, а далее каждый день решал половину задач, оставшихся от предыдущего дня, и еще одну. В пятницу той же недели все задачи сборника были решены. Сколько всего задач было в сборнике?

б) Решив все задачи, Петя начал составлять последовательность $\{a_n\}$ из натуральных чисел по следующему правилу: первым членом является любое число a_1, а дальше члены последовательности находятся по формуле $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}-1$. Если на каком-то этапе получается не натуральное число, то последовательность заканчивается последним натуральным числом. Чему равен последний член этой последовательности?

в) Какое наибольшее количество квадратов может быть в такой последовательности?

61. а) Из последовательности всех натуральных чисел вычеркнем все числа, делящиеся на 3. Какое число в оставшейся последовательности будет стоять на месте с номером 1000?

б) Сумма квадратов цифр трехзначного числа a делится на 3, а сумма кубов его цифр не делится на 3. Будет ли делиться на 3 произведение цифр числа a?

в) У квадратного уравнения $x^2-px+q=0$ коэффициенты p и q, а также корни x_1 и x_2 являются натуральными числами, не делящимися на 3. Какой остаток при делении на 3 имеет число q?

62. Натуральный ряд «удвоили», то есть каждое число записали дважды: 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... Получившийся ряд чисел разбили на последовательности: $M_1=(1),\ M_2=(1;2),\ M_3=(2;3;3),\ldots$ так, что последовательность M_n содержит n чисел, идущих по порядку.

а) Может ли сумма чисел в какой-либо последовательности равняться 89?

б) Может ли сумма чисел в какой-либо последовательности равняться 119?

в) Чему равна сумма чисел в последовательности M_{100}?

63. а) Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, состоящая из трех трехзначных натуральных чисел a, b, c, где $a<b<c$, у которых множества цифр одинаковые?

б) Три натуральных числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Число a двузначное, число b получается, если цифры числа a поменять местами, число c получается, если между цифрами числа a вставить ещё одну цифру. Найдите числа a, b, c и разность прогрессии d.

в) На счетчике расхода воды 1 января стояло трехзначное число. 1 февраля цифры поменялись местами — первая стала третьей, вторая первой, а третья второй. 1 марта цифры опять поменялись местами таким же образом — первая стала третьей, вторая первой, а третья второй. При этом расход воды в январе и феврале был одинаковым. Найдите ежемесячный расход воды и показания счетчика с 1 января по 1 марта.