

1. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4.
- Докажите, что сечение является равнобедренным остроугольным треугольником.
  - Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
2. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6.
- Докажите, что сечение — равнобедренный остроугольный треугольник.
  - Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.
3. Основанием пирамиды является трапеция с основаниями 25 и 7 и острым углом  $\arccos 0,6$ . Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом  $60^\circ$ .
- Докажите, что существует точка  $M$ , одинаково удаленная от всех вершин пирамиды (центр описанной сферы).
  - Найдите объем данной пирамиды.
4. Шар касается основания  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  в точке  $B$  и ее бокового ребра  $SA$ .
- Докажите, что центр шара лежит в плоскости, перпендикулярной ребру  $AC$ , и проходящей через его середину.
  - Найдите радиус шара, если сторона основания пирамиды равна 3, а боковое ребро равно 4.
5. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.
- Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.
  - Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.
6. Радиус основания конуса с вершиной  $P$  равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки  $A$  и  $B$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 5.
- Докажите, что сечение конуса плоскостью  $ABP$  — равнобедренный остроугольный треугольник.
  - Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ .
7. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84.
- Докажите, что сечение шара второй плоскостью является кругом.
  - Найдите радиус шара.
8. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 18 и 8. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом  $60^\circ$ .
- Докажите, что существует точка  $O$  (центр вписанной сферы), одинаково удаленная от всех граней пирамиды.
  - Найдите площадь полной поверхности данной пирамиды.
9. Дан прямой круговой конус с вершиной  $M$ . Осевое сечение конуса — треугольник с углом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Образующая конуса равна  $2\sqrt{3}$ . Через точку  $M$  проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.
- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
  - Найдите площадь сечения.
10. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно  $\sqrt{730}$ .
- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.
  - Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
11. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.
- Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.
  - Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.
12. Прямоугольник  $ABCD$  и цилиндр расположены таким образом, что  $AB$  — диаметр верхнего основания цилиндра, а  $CD$  лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом  $60^\circ$ .
- Докажите, что  $ABCD$  — квадрат.
  - Найдите длину той части отрезка  $BD$ , которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен  $\sqrt{2}$ .
13. На окружности основания конуса с вершиной  $S$  отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AB = BC$ . Медиана  $AM$  треугольника  $ACS$  пересекает высоту конуса.
- Точка  $N$  — середина отрезка  $AC$ . Докажите, что угол  $MNB$  прямой.
  - Найдите угол между прямыми  $AM$  и  $SB$ , если  $AS = 2$ ,  $AC = \sqrt{6}$ .
14. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания — точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  — образующая цилиндра, а  $AC$  — диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 2$ .
- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $45^\circ$ .
  - Найдите объем цилиндра.

15. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , причем  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.
- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
  - Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 6$ ,  $BB_1 = 15$ ,  $B_1C_1 = 8$ .
16. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания — точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  — образующая цилиндра, а  $AC$  — диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 4$ .
- Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .
  - Найдите объём цилиндра.
17. В цилиндре на окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  — образующая цилиндра, а  $AC_1$  пересекает его ось цилиндра.
- Докажите, что угол  $C_1BA = 90^\circ$ .
  - Найдите площадь боковой поверхности, если  $AB = 16$ ,  $BB_1 = 5$ ,  $B_1C_1 = 12$ .
18. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , причем  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.
- Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
  - Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если  $AB = 20$ ,  $BB_1 = 15$ ,  $B_1C_1 = 21$ .
19. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания — точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  — образующая цилиндра, а  $AC$  — диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $CC_1 = 4\sqrt{6}$ .
- Докажите, что угол между прямыми  $BC$  и  $AC_1$  равен  $60^\circ$ .
  - Найдите расстояние от точки  $B$  до  $AC_1$ .
20. В конусе с вершиной  $S$  и центром основания  $O$  радиус основания равен 13, а высота равна  $3\sqrt{41}$ . Точки  $A$  и  $B$  — концы образующих,  $M$  — середина  $SA$ ,  $N$  — точка в плоскости основания такая, что прямая  $MN$  параллельна прямой  $SB$ .
- Докажите что  $\angle ANO$  — прямой угол.
  - Найдите угол между  $MB$  и плоскостью основания, если дополнительно известно что  $AB = 10$ .
21. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$ , причем  $A$  и  $C$  диаметрально противоположны. Точка  $M$  — середина  $BC$ .
- Докажите, что прямая  $SM$  образует с плоскостью  $ABC$  такой же угол, как и прямая  $AB$  с плоскостью  $SBC$ .
  - Найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBC$ , если  $AB = 6$ ,  $BC = 8$  и  $AS = 5\sqrt{2}$ .
22. Радиус основания конуса с вершиной  $S$  и центром основания  $O$  равен 5, а его высота равна  $\sqrt{51}$ . Точка  $M$  — середина образующей  $SA$  конуса, а точки  $N$  и  $B$  лежат на основании конуса, причём прямая  $MN$  параллельна образующей конуса  $SB$ .
- Докажите что  $\angle ANO$  — прямой.
  - Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 8$ .
23. Дан прямой круговой конус с вершиной  $M$ . Осевое сечение конуса — треугольник с углом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Образующая конуса равна  $2\sqrt{3}$ . Через точку  $M$  проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.
- Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.
  - Найдите расстояние от центра  $O$  основания конуса до плоскости сечения.
24. Основание  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина  $S$  расположена на оси  $O_1O_2$  цилиндра (точка  $O_1$  — центр верхнего основания, точка  $O_2$  — центр нижнего основания). Объем цилиндра равен  $21\pi$ , а объем пирамиды  $3\sqrt{3}$ .
- Докажите, что  $SO_1 : SO_2 = 3 : 4$ .
  - Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $SB$ , если радиус основания цилиндра равен  $2\sqrt{3}$ .
25. Радиус основания конуса равен 12, а высота равна 5.
- Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
  - Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.
26. Шар проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба.
- Докажите, что сфера касается ребер в их серединах.
  - Найдите объём шара, если ребро куба равно 1.
27. Дан прямой круговой конус с вершиной  $M$ . Осевое сечение конуса — треугольник с углом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Образующая конуса равна  $6\sqrt{3}$ . Через точку  $M$  проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.
- Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.
  - Найдите расстояние от центра  $O$  основания конуса до плоскости сечения.

28. Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 1 : 3.

- а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 4 : 1, считая от вершины конуса.
- б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5.

29. Радиус основания конуса с вершиной  $S$  равен 8, а высота конуса  $SO$  равна  $\sqrt{88}$ . Точка  $M$  — середина образующей  $SA$  конуса, а точки  $B$  и  $N$  лежат в плоскости основания конуса так, что отрезок  $SB$  — образующая конуса, а прямая  $MN$  параллельна  $SB$ .

- а) Докажите, что прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $SON$ .
- б) Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 10$ .

30. Диаметр основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость  $\alpha$  пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Пусть  $M$  и  $N$  — середины этих хорд,  $P$  — точка пересечения прямой  $MN$  с осью цилиндра.

- а) Докажите, что расстояния от точки  $P$  до плоскостей основания цилиндра относятся как 5 : 12.
- б) Найдите тангенс угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания цилиндра.

31. На отрезке  $O_1O_2$ , соединяющем центры оснований кругового цилиндра, отмечены точки  $P$  и  $F$  так, что  $O_1P : PF : FO_2 = 1 : 4 : 7$ . В цилиндре расположены два конуса: первый с вершиной  $F$ , основанием которого является круг основания с центром  $O_1$ , второй — с вершиной  $P$ , основанием которого является круг основания с центром  $O_2$ .

- а) Докажите, что боковые поверхности этих конусов пересекаются по окружности, радиус которой в 4 раза меньше радиуса основания цилиндра.
- б) Найдите объем общей части этих конусов, если высота цилиндра равна 10, а радиус основания цилиндра равен 3.

32. Перпендикулярные и равные ребра  $AD$  и  $BC$  тетраэдра  $ABCD$  являются диаметрами двух оснований цилиндра, длина образующей которого равна длине ребра  $BC$ .

- а) Докажите, что осевое сечение цилиндра, проходящее через  $BC$ , делит высоту тетраэдра  $ABCD$ , опущенную на грань  $ABC$ , в отношении 5 : 3, считая от вершины  $D$ .
- б) Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади полной поверхности тетраэдра.

33. Через вершину  $S$  конуса проведена плоскость, которая пересекает основание в точках  $A$  и  $B$ . Высота конуса  $SO$  равна  $4\sqrt{3}$ , дуга  $AB$  равна  $90^\circ$ , а хорда  $AB$  равна 8.

- а) Докажите, что угол между плоскостью  $SAB$  и плоскостью основания конуса равен  $60^\circ$ .
- б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

34. На окружности основания конуса с вершиной  $S$  отмечены точки  $K$  и  $M$  по одну сторону от диаметра основания  $AB$  так, что плоскости  $ASK$  и  $BSM$  наклонены к плоскости основания конуса под углами  $\arctg \sqrt{2}$  и  $\arctg \sqrt{3}$ , причем точка  $M$  принадлежит дуге  $BK$ , не содержащей точку  $A$ . Тангенс угла наклона образующей конуса к плоскости основания равен  $\frac{\sqrt{30}}{4}$ .

- а) Докажите, что плоскость  $KMS$  наклонена к плоскости основания конуса под углом  $60^\circ$ .
- б) Найдите площадь треугольника  $SKM$ , если радиус основания конуса равен 2.

35. Дан цилиндр, осевым сечением которого является прямоугольник, с центрами нижнего и верхнего оснований в точках  $O$  и  $O_1$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через диаметр  $AB$  нижнего основания и имеет с верхним основанием ровно одну общую точку  $K$ .

- а) Докажите, что проекция точки  $K$  на плоскость нижнего основания лежит на прямой, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно  $AB$ .
- б) Найдите расстояние от центра верхнего основания (точки  $O_1$ ) до плоскости  $\alpha$ , если радиус основания цилиндра равен 15, а высота цилиндра равна 20.

36. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса с вершиной  $S$ . Точка  $M$  — середина хорды  $BC$ ,  $AC$  — диаметр.

- а) Докажите, что угол между прямой  $SM$  и плоскостью  $ABC$  равен углу между прямой  $AB$  и плоскостью  $SBC$ .
- б) Найдите высоту конуса, если угол между прямой  $AB$  и плоскостью  $SBC$  равен  $60^\circ$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 6$ .

37. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки  $M$  и  $N$ , а на окружности верхнего основания отмечены точки  $M_1$  и  $K_1$  так, что прямая  $MM_1$  является образующей, перпендикулярной основаниям, а прямая  $NK_1$  пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что прямые  $MN$  и  $M_1K_1$  перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми  $NK_1$  и  $MM_1$ , если известно, что  $MN = 20$ ,  $M_1K_1 = 15$ .