1. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ADP, проведённую из вершины D, если известно, что сторона квадрата равна 1.

2. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

5. Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

6. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

7. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

9. Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.

10. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

11. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и $BC = 93$. На стороне BC взята точка M, причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB.

12. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

13. Площадь трапеции $ABCD$ равна 60, а одно из оснований трапеции втрое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

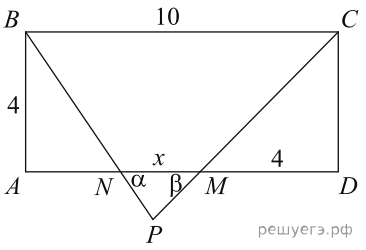
14. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 10$ и $BC = 9$. На прямой BC взята точка M, причём $AM = 10$. Найдите площадь треугольника AMB.

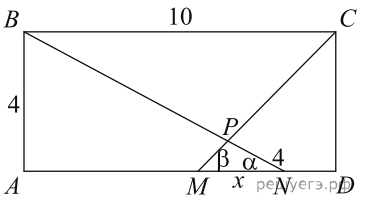
15. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ABP, проведённую из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

16. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 55. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABE, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

17. Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

18. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N таким образом, что $DM = 4$, при этом P — точка пересечения прямых BN и CM. Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N.





19. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 2$. Найдите BC если $AB = 12$.

20. Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\frac{15}{17}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

21. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

22. На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC = 6$, $AC = 4$.

23. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 3 и 6. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 48. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри угла.

24. Из вершин острых углов B и C треугольника ABC проведены две его высоты — BM и CN, причем прямые BM и CN пересекаются в точке H. Найдите угол BHC, если известно, что $MN = \frac{1}{3}BC$.

25. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M.

Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

26. Биссектриса острого угла A трапеции $ABCD$ пересекает боковую сторону CD в точке T, а продолжение основания BC трапеции в точке K так, что $ABKD$ — параллелограмм и $TD : TC = 4 : 1$.

а) Докажите, что прямые AK и BD перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если ее сторона $AB = 8$ и $\angle B = 120^\circ$.

27. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана BE. Точки M и N являются ортогональными проекциями на сторону AB точек D и E соответственно, причем $\frac{AM}{MB} = \frac{9}{1}$; $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите отношение $\frac{AD^2}{BE^2}$.

28. В трапеции $ABCD$ с нижним основанием AD площади треугольников ABD и BDC равны соответственно 12 и 4, а точка G является серединой BD. Ниже прямой AD выбрана точка E, $AE = BD$, а на отрезке EC выбрана точка F такая, что CF в 4 раза короче CE.

а) Докажите, что угол BFG равен 90°.

б) Найдите длину отрезка BD, если дополнительно известно, что $\angle CFG = 75^\circ$, а $\angle BGC = 15^\circ$.

29. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1.

а) Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм или трапеция.

б) Найдите BC, если площадь всего четырехугольника не превосходит 4, а $AD = 3$.

30. Биссектрисы углов C и D четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Диагональ BD разбивает отрезок KC в отношении 2 : 1, считая от вершины C. При этом площадь треугольника ACD в два раза больше площади треугольника AKD.

а) Докажите, что угол CKD прямой.

б) Найдите BK, если $BC = 6$.

31. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{1}{3}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

32. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC заданы соответственно точки M и N такие, что $AM = MB$, $BN : NC = 1 : 2$. Отрезки CM и AN пересекаются в точке O.

а) Докажите, что расстояние от точки O до прямой AC равно $\frac{2}{5}BH$, где BH высота треугольника ABC.

б) Найдите расстояние от точки O до прямой AC, если $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$, $AC = 8$.

33. В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC — тупоугольный.

б) Найти длину стороны AC, если $AB = 4$.