

1. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как $\sqrt{7} : 2$.

б) Найдите площадь этой сферы.

2. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что двугранный угол при основании пирамиды больше 45° .

б) Найдите площадь вписанной сферы.

3. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

4. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что существует сечение пирамиды, проходящее через её вершину и являющееся тупоугольным треугольником.

б) Найдите площадь вписанной сферы.

5. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

а) Докажите, что площадь поверхности меньшего шара не меньше, чем 32.

б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

6. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4.

а) Докажите, что площадь поверхности меньшего шара не меньше, чем 24.

б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

7. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды CA_1B_1M .

8. Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP .

9. Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы

10. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция. Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° .

а) Докажите, что существует точка (центр описанной сферы), одинаково удаленная ото всех вершин пирамиды.

б) Найдите радиус данной сферы, если дополнительно известно, что основания трапеции равны 8 и 18, а ее боковая сторона равна 13.

11. Две правильные четырехугольные пирамиды $EABCD$ и $FABCD$ имеют общее основание $ABCD$ и расположены по разные стороны от него. Точки M и N — середины рёбер AB и BC соответственно. Все ребра пирамид равны.

- а) Докажите, что угол между прямыми AE и BF равен 60° .
- б) Найдите угол между прямыми EM и FN .

12. Внутри цилиндра расположен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ так, что все его вершины лежат на поверхности цилиндра, причём вершины B и D_1 совпадают с центрами оснований, а остальные вершины лежат на боковой поверхности цилиндра.

- а) Докажите, что плоскость $AB_1 C$ параллельна основаниям цилиндра.
- б) Найдите объём цилиндра, если ребро куба равно 3.

13. Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4 : 7.

- а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33 : 32, считая от вершины конуса.
- б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.

14. Квадрат $ABCD$ и прямой цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания цилиндра и касается его окружности.

- а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60° .
- б) Найдите длину находящейся снаружи цилиндра части отрезка BD , если образующая цилиндра равна $\sqrt{15}$.

15. В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 4 и стороной основания $2\sqrt{3}$ вписан шар. Плоскость α перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через её середину.

- а) Докажите, что плоскость α и шар не имеют общих точек.
- б) Найдите расстояние от центра шара до плоскости α .

16. В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB : FA = 27 : 8$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 2, а точка M выбрана на ребре BC так, что $BM : MC = 1 : 2$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB , площадь поверхности этой сферы равна 16 π .

- а) Докажите, что треугольники ABC и ABF — прямоугольные.
- б) Найдите объём пирамиды $ACMT$.

17. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ углы боковых граней при вершине пирамиды D — прямые. Внутри пирамиды находится куб, диагональ которого совпадает с высотой пирамиды.

- а) Докажите, что ребро куба в три раза меньше бокового ребра пирамиды.
- б) Найдите площадь поверхности пирамиды $DABC$, если площадь поверхности куба равна 96.

18. В правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ вписан куб, одна грань которого лежит в плоскости основания $ABCD$ пирамиды, а все вершины противоположной грани лежат на апофемах боковых граней пирамиды. Ребро куба в 2,5 раза меньше высоты пирамиды.

- а) Докажите, что вершины куба делят апофемы боковых граней пирамиды в отношении 3 : 2, считая от вершины пирамиды.
- б) Найдите площадь поверхности пирамиды, если площадь поверхности куба равна 108.

19. Основанием пирамиды является треугольник, один из углов которого 135° , а противолежащая ему сторона $8\sqrt{6}$. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 60° . Точка O — центр сферы, описанной около данной пирамиды.

- а) Докажите, что точка O расположена между вершиной и основанием пирамиды.
- б) Найдите расстояние от точки O до плоскости основания.