1. Окружность с центром O, расположенном внутри прямоугольной трапеции $ABCD$, проходит через вершины B и C большей боковой стороны этой трапеции и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

2. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

3. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD.

4. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120°$.

5. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

6. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\dfrac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

7. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.

8. Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

9. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точке C и M.

а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O.

Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

10. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2.

11. Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает BC и CD в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что отрезки AE и AK равны.

б) Найдите AD, если $CE = 48$, $DK = 20$, $\cos\angle BAD = 0,4$.

12. Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 11$, $KL = 10$, $LB = 4$.

13. Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D.

а) Докажите, что $AE = AK$.

б) Найдите AD, если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos\angle BAD = 0,2$.

14. Окружность проходит через вершины A, B и C параллелограмма и пересекает продолжение стороны AD в точке E, а продолжение стороны CD в точке K.

а) Докажите, что отрезки BE и BK равны.

б) Найдите отношение KE к AC, если $\angle ABC = 135^\circ$.

15. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Около треугольника KLN описана окружность, прямые LM и MN — касательные к этой окружности.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

16. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка QN, если $BC = 4{,}5$, $AD = 21{,}5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD — прямой.

17. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Окружность проходит через точки B и C и пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q, отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите PM, если отрезки AQ и BQ перпендикулярны, $AB = 15$, $BC = 1$, $CD = 17$, $AD = 9$.

18. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $OP = AP$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC, если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

19. В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 10$, $BD = 26$.

20. В прямоугольнике $ABCD$, в котором $AD = 3 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, а $AB = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K, радиус которой равен 2, касается сторон AB и AD. Окружность с центром в точке L, радиус которой равен 1, касается стороны CD и первой окружности.

а) Докажите, что точки A, K, L лежат на одной прямой.

б) Найдите площадь треугольника CLM, если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

21. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к этой окружности, равна 2.

а) Докажите, что длина отрезка, соединяющего центр квадрата и центр окружности равна длине отрезка CK.

б) Найдите диаметр окружности.

22. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол BCD — тупой. Через точку B проведена прямая, параллельная прямой CD и пересекающая прямую AD в точке E. На продолжении BE за точку E отмечена точка F такая, что $DE = DF$.

а) Докажите, что точки A, F, C и D лежат на одной окружности.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой AF, если $BD = 10$ и $\cos\angle ADC = 0,6$.

23. В четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, если $AC = 10$ и $BD = 26$.

24. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AB как на диаметре построена окружность C центром O. Отрезок OD пересекает окружность в точке M. Известно, что $\dfrac{DM}{AB} = \dfrac{\sqrt{26}-1}{2}$.

а) Докажите, что стороны прямоугольника относятся как 5 : 2.

б) Найдите MC, если известно, что $AM = \sqrt{2-\dfrac{2}{\sqrt{26}}}$.

25. В окружности с центром O построен квадрат $KOFD$ так, что его вершина D лежит на окружности. Из точки B, диаметрально противоположной точке D, проведены две хорды AB и BC, проходящие через вершины K и F квадрата соответственно.

а) Докажите, что $AK : KB = 1 : 5$.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если радиус окружности равен 5.

26. Диагональ трапеции делит ее на два подобных прямоугольных треугольника, в каждый из которых вписана окружность.

а) Докажите, что произведение оснований трапеции равно квадрату этой диагонали.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, если основания трапеции равны 9 и 25.

27. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке L, а окружность с диаметром AC пересекает основание AD в точке K. Отрезки AL и CK пересекаются в точке M.

а) Докажите, что точка M лежит на диагонали BD трапеции $ABCD$.

б) Найдите расстояние от точки M до боковой стороны AB, если $BC = 4$, $AD = 28$.

28. Два квадрата $ABCD$ и $AMNK$ с периметрами соответственно 20 и 24 располагают в круге так, что точки C, D, M, N лежат на окружности, A — общая, B и K внутри круга, угол BAK — острый.

а) Докажите, что угол BAK равен $\dfrac{\pi}{4}$.

б) Найдите площадь круга.

29. Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$ и касается его сторон AB и AD в точках K и P соответственно. К хорде KP проведен перпендикуляр CH.

а) Докажите, что треугольники CBK и CHP подобны.

б) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $CH = 7$.

30. В прямоугольной трапеции $ABCD$ к большей боковой стороне BC построен перпендикуляр, пересекающий BC и AD в точках F и N соответственно. Окружность, описанная около треугольника ABN проходит через T — точку пересечения DF и NC, а окружность, описанная около треугольника DNC проходит через P — точку пересечения AT и BN. Угол NAT равен 18°.

а) Докажите, что PF параллельна AB.

б) Найдите PT, если $AB = \sqrt{5}+1$.

31. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD $(BC < AD)$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, делят диагональ AC в отношении 2 : 1 : 1, считая от точки A.

а) Докажите, что одно из оснований трапеции равно боковой стороне.

б) Найдите отношение, в котором диагональ AC делит площадь трапеции.

32. Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K.

а) Докажите, что $AE = AK$.

б) Найдите отношение $KE : BD$, если $\angle BAD = 60^\circ$.

33. В прямоугольнике $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 2 : 1$, DK пересекает AC в точке P. На стороне AD отмечена точка T так, что PT касается окружности, вписанной в треугольник ACD, а около четырёхугольника $PCDT$ можно описать окружность.

а) Докажите, что $AT : TD = 5 : 3$

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $PCDT$, если $AB = 3$.

34. Окружность проходит через вершины C и D ромба $ABCD$ и касается стороны AB, а также пересекает стороны AD и BC в точках M и N соответственно, причем $BN : CN = 4 : 5$.

а) Докажите, что $AM : MD = 1 : 8$.

б) Найдите CM, если сторона ромба равна 9.

35. Окружность с центром O, расположенном внутри прямоугольной трапеции $ABCD$, проходит через вершины B и C большей боковой стороны этой трапеции и касается боковой стороны AD в точке K. При этом отрезок AB пересекает окружность в точке T.

а) Докажите, что $\angle KCB = \angle AKB$.

б) Найдите AB, если перпендикуляр KH к стороне BC равен 10, а $DC = 25$.

36. Из точки M вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Угол между касательными равен 60°.

а) Докажите, что диагональ трапеции равна отрезку касательной от точки M до точки касания.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему.

37. В квадрате $ABCD$ построена окружность с центром в точке A, радиусом, равным стороне квадрата, и окружность с центром в точке C, радиусом, равным половине стороны квадрата. Окружности пересекаются в точках M и N.

а) Докажите, что прямая MN делит сторону BC в отношении 3 : 5, считая от точки B.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AMCN$, если площадь квадрата равна 8.

38. В квадрате $KLMN$ точка D — середина стороны KL, точка E — середина отрезка DM. На стороне KN отмечена точка B так, что $KB : BN = 1 : 3$.

а) Докажите, что $\angle DBE = 45^\circ$.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BDE и BMD, если площадь четырехугольника $BEMN$ равна 17.

39. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Прямая, проходящая через вершину A, пересекает отрезки MN и BC в точках K и L соответственно, причем в четырехугольник $BMKL$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что периметр треугольника AMK вдвое больше отрезка BL.

б) Найдите AL, если $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$.

40. В прямоугольнике $KLMN$ $KL < LM$. Окружность ω_1 с центром O_1 вписана в угол MNK и касается окружности ω_2 с центром в точке O_2, вписанной в угол KLM, причем прямая NO_1 касается окружности ω_2. Известно, что радиус окружности ω_1 относится к радиусу окружности ω_2 как 2 : 3. Прямая O_1O_2 пересекает стороны KL и MN в точках P и R соответственно, а общая касательная окружностей ω_1 и ω_2 пересекает стороны LM и KN в точках Q и S соответственно.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $PQRS$ относится к площади прямоугольника $KLMN$ как 25 : 49.

б) Найдите отношение площадей треугольников PRS и PRQ.

41. Вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ лежат на окружности, вершина D не лежит на этой окружности. Ее хорды BK и BM перпендикулярны прямым AD и CD соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $ACMK$ является прямоугольником.

б) Найдите площадь четырехугольника $ACMK$, если радиус окружности равен 2, а $\angle BAD = 75^\circ$.