

1. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

- Докажите, что около четырёхугольника $ABQP$ можно описать окружность.
- Найдите длину отрезка DQ , если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

- Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.
- Найдите BD .

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

- Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
- Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 3$ и $AH = 2\sqrt{2}$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M , а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N .

- Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.
- Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если CDB вдвое меньше угла ADB .

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом 10. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .

6. Хорды AC и BD пересекаются в точке T . На хорде BC отложен отрезок CP , равный AD . Точки P и D равноудалены от хорды AC , а отрезок TP перпендикулярен хорде BC .

- Докажите, что площади четырёхугольников $ABPD$ и $APCD$ равны.
- Найдите эти площади, если площадь треугольника ATD равна трем.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 27$. Известно, что $AB = BC = CD = 36$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .

8. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1 : 4$, считая от точки D . Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD . На меньшей дуге AB окружности взята точка M .

- Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.
- Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

9. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка F лежит на его стороне AD , причём прямые BF и CD параллельны, и прямые CF и AB параллельны.

- Докажите, что отрезки BF и CF разбивают четырёхугольник $ABCD$ на три подобных треугольника.
- Известно, что $AF = 1$, $DF = 4$. Найдите BC .

10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке E . Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

- Докажите, что $AE \cdot AC = AD \cdot AB$.
- Найдите AE , если известно, что $BC = 7$, $CE = 4$.

11. На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B . Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.

а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.

б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$.

12. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника перпендикулярно стороне BC , делит пополам сторону AD .

б) Найдите стороны четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AC = 84$ и $BD = 77$, а диаметр окружности равен 85.

13. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $AC = 5$ и $BC = \sqrt{61}$. На его стороне BC вне треугольника (точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC) построим равносторонний треугольник BCD .

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.

б) Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$.

14. В окружность вписана трапеция, основание AD которой является диаметром, а угол BAD равен 60° . Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P так, что $AP : PD = 1 : 3$.

а) Докажите, что CP делит трапецию на две равновеликие части.

б) Найдите площадь треугольника BPE , если радиус окружности равен $2\sqrt{7}$.

15. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E , лежащей на стороне CD . Известно, что $CD : BC = 3 : 1$.

а) Докажите, что точка E равноудалена от прямых AD и AB .

б) Найдите отношение площадей треугольников ADE и BCE .

16. Точка F лежит на меньшей дуге BC окружности, описанной около квадрата $ABCD$, причем $\angle FCB = 2 \cdot \angle FBC$. Прямая AF пересекает сторону BC в точке T , а диагональ BD — в точке O .

а) Докажите, что $TO = TC$.

б) Найдите длину стороны квадрата, если $BO = 1$.