

1. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF , AH , AP и AQ на прямые DE , BE , CD и BC соответственно.

- Докажите, что $\angle F A H = \angle P A Q$.
- Найдите AH , если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.

2. Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O .

a) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

- Найдите AO , если сторона квадрата равна 1.

3. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 10$, $BC = 12$. На стороне AB отметили точки M_1 и M_2 так, что $AM_1 < AM_2$. Через точки M_1 и M_2 провели прямые, перпендикулярные стороне AB и отсекающие от треугольника ABC пятиугольник, в который можно вписать окружность.

- Докажите, что $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$.
- Найдите площадь данного пятиугольника.

4. Окружность, проходящая через вершину B треугольника ABC , касается стороны AC в точке D , такой, что BD — биссектриса угла B , и пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно.

a) Докажите, что $AE : CF = AB : BC$.

b) Найдите отношение площадей треугольников AED и DFC , если известно, что $AE : CF = 2 : 3$.

5. Внутри окружности с центром O построен правильный шестиугольник $KOFPDL$ так, что его вершина D лежит на окружности. Из точки B , диаметрально противоположной точке D , проведены две хорды AB и BC , проходящие через вершины K и F шестиугольника соответственно.

- Докажите, что $AK : KB = 3 : 7$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если радиус окружности равен 14.

6. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $KCMN$ так, что вершины K и M расположены на катетах AC и BC соответственно, а на гипотенузе AB — вершина N . Вершины квадрата $TPQR$ расположены на сторонах треугольника ABC , причём вершины P и Q находятся на катетах AC и BC соответственно, а вершины R и T — на гипотенузе AB .

a) Докажите, что точка C и центры квадратов $KCMN$ и $TPQR$ лежат на одной прямой.

- Найдите длину стороны квадрата $TPQR$, если $AC = 5$ и $BC = 12$.

7. Пятиугольник $ABCDE$ — вписанный, точка M — пересечение диагоналей BE и AD . Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

- Докажите, что две стороны пятиугольника равны.
- Найдите AB , если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

8. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M . Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

a) Докажите, что $BC = DE$.

b) Найдите длину стороны AB , если известно, что $DE = 4$, $AD = 7$, $BE = 8$ и $AB > BC$.

9. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Через точку B и середину отрезка OD проведена прямая, пересекающая сторону ED в точке T .

a) Докажите, что прямая BT делит площадь шестиугольника в отношении $5 : 13$.

b) Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники BET и BCT с прямой BT , если сторона шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{13} - 1$.

10. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ через вершину A проведена прямая, которая пересекает отрезок CF в точке K и делит площадь шестиугольника $ABCDEF$ в отношении $1 : 11$.

a) Докажите, что прямая AK делит диагональ FC в отношении $1 : 5$.

b) Прямая AK пересекает описанную около шестиугольника $ABCDEF$ окружность в точке T . Найдите отношение, в котором прямая BT делит отрезок AC .