

1. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB , являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB , является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB .

б) Найдите площадь треугольника ACB .

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC .

б) Найдите радиус второй окружности.

3. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K .

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK .

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N . Найдите AB , если $BK = 18$ и $BN = 17$.

4. Окружность радиуса $\frac{120}{17}$ с центром на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC , равных соответственно 10 и 24.

а) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

б) Найдите высоту, опущенную из вершины прямого угла треугольника ABC .

5. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите угол OIH , если $\angle ABC = 75^\circ$.

6. Точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC , AC и AB остроугольного треугольника ABC .

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 , лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1 .

б) Известно, что $AB = AC = 10$ и $BC = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 , A_1BC_1 и B_1AC_1 .

7. Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC .

8. В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

9. Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

10. Точка I — центр окружности S_1 , вписанной в треугольник ABC , точка O — центр окружности S_2 , описанной около треугольника BIC .

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Найдите косинус угла BAC , если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3 : 5$.

11. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 20$, $AC = 12$ и $BC = 16$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC , касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC , а вторая описана около треугольника AMN .

12. Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 30$, $BC = 40$ и $AB = 50$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L , M — середина BC , AP — биссектриса треугольника ABC , O — центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что P — середина отрезка LM .

б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K , а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

13. Окружность, касающаяся сторон AB и BC треугольника ABC , пересекает сторону AC в точках M и P , причем $AM = MP = PC$.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, если $AC = 21$, а центр окружности лежит на высоте к стороне BC .

14. В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает описанную окружность этого треугольника в точке F . Точка E — центр окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон AB и BC (внеписанной окружности). Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

а) Докажите, что отрезки AF и OF равны.

б) Найдите длину отрезка CF , если $OE = 14$.

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN . Оказалось, что точки B , C , M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 5$, а $BN = 14$.

16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

17. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .

б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 150^\circ$, $BC = 5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A , A_1 , C , C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1C_1 = 6$.

19. Точка O_1 — центр вписанной окружности равнобедренного треугольника ABC , а точка O_2 — центр внеписанной окружности, касающейся основания BC .

а) Докажите, что расстояние от середины отрезка O_1O_2 до точки C вдвое меньше O_1O_2 .

б) Известно, что радиус первой окружности в пять раз меньше радиуса второй. В каком отношении точка касания первой окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

20. В окружности с центром O проведена хорда AB , на которой выбрана точка M . Вторая окружность, описанная около треугольника MAO , повторно пересекает первую окружность в точке K .

а) Докажите, что $BM = MK$.

б) Найдите площадь треугольника OMK , если $OM = 11$ и $BK = 12$.

21. Точки D и E — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN , если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

22. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Проведена высота CH . На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны.

б) Найдите BN , если $AM = 9$, $MC = 3$, $BC = 8$.

23. Окружность с центром O , построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D . Касательная, проведенная к этой окружности в точке D , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P , прямая OM пересекает прямую BP в точке K . Найдите $BK : KP$, если $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$.

24. Прямая, проходящая через середину M стороны BC треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке K , причём $\angle CMK = \angle BAC$.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle BKM$.

б) Найдите медиану MN треугольника CKM , если $BC = 20$, $AB = \sqrt{87}$, $CK = 8$.

25. Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN , если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

26. Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C . Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD .

а) Докажите, что O_1 и O_2 лежат на отрезке EF .

б) Найдите расстояние от точки C до прямой O_1O_2 , если $AC = 15$ и $BC = 20$.

27. Окружность с центром O_1 радиусом 9 вписана в треугольник ABC . Ее внешним образом касаются окружность с центром O_2 радиусом $\frac{81}{25}$, вписанная в угол A , и окружность с центром O_3 радиусом 1, вписанная в угол C .

а) Докажите, что $\angle C = \pi - \arctg \frac{24}{7}$.

б) Найдите площадь треугольника AO_1O_3 .

28. В окружности с центром O отрезок EK — диаметр. Хорды ET и KS проведены так, что точки T и S лежат по одну сторону от прямой EK . Точка пересечения прямых KT и ES находится от точек T и S на расстоянии 5, $\angle TKE = 60^\circ$.

а) Докажите, что точка пересечения прямых KT и ES находится вне окружности.

б) Найдите радиус окружности.

29. Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C . Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD .

а) Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на отрезке EF .

б) Найдите расстояние от точки C до прямой O_1O_2 , если $AC = 15$ и $BC = 20$.

30. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O , которая касается стороны AB в точке K . Окружность в точке O_1 касается стороны AB в точке L , а также продолжений сторон AC и BC .

а) Докажите, что около четырёхугольника $AOBO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $AOBO_1$ и $KOLO_1$, если известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $BC = 10$.

31. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC , точки O_1 , O_2 , O_3 — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC , AC , AB соответственно.

а) Докажите, что точка O является точкой пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

б) Найдите угол A треугольника ABC , если отрезок OO_1 короче отрезка O_2O_3 ровно в два раза.

32. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K .

а) Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC .

б) Найдите длину отрезка AK , если периметр треугольника ABC равен 20, а сторона BC равна 5.

33. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . В треугольники ADC и ADB вписаны окружности с длинами радиусов 3 и 8 соответственно, касающиеся отрезка AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что треугольник, образованный точкой D и центрами данных окружностей прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами данных окружностей, если $ND = 4$.

34. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямая BO вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P .

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APC , если известно, что радиус его описанной окружности равен 8, а $\angle ABC = 60^\circ$.

35. Внутри треугольника ABC , в котором $\angle B = 45^\circ$, выбрана точка Q такая, что $S_{ABQ} : S_{ACQ} : S_{CBQ} = 1 : 2 : 4$. Прямые CQ и AQ пересекают стороны AB и BC соответственно в точках K и L . Известно, что точки A , K , L и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите квадрат расстояния от точки Q до центра вписанной в треугольник ABC окружности, если площадь треугольника ABC равна 7.

36. Из точки A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках K и L , причем точка L лежит между A и K , а треугольник AMK — остроугольный. Расстояние от центра окружности до хорды KM равно половине радиуса окружности.

а) Докажите, что угол AMK равен 60° .

б) Найдите площадь треугольника AMK , если $AL : LK = 4 : 3$ и радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

37. Точка O — центр описанной окружности около остроугольного треугольника ABC . На луче AO за точкой O выбрана точка P так, что $\angle BAC + \angle APC = 90^\circ$.

а) Докажите, что $\angle OBC = \angle OPC$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OPC , если $BC = 24$, $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$.

38. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а J — центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC . Пусть r и r_1 — радиусы этих окружностей, а h — высота треугольника ABC , проведенная из вершины B к стороне AC .

а) Докажите, что $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{h}$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника AIC равна 10, а площадь треугольника AJC равна 15.

39. Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), касается боковой стороны AB в точке P , а основания BC — в точке M . Вторая окружность (внеписанная), касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q .

а) Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PMQ , совпадает с вершиной B .

б) Найдите стороны треугольника ABC , если известно, что $PQ = 12$, а расстояние между центрами первой и второй окружностей равно 15.

40. Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K , а гипотенузу AB — в точке M .

а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.

б) Найдите площадь четырехугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.

41. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . На стороне AB взята точка K так, что отрезки KL и BC параллельны. Окружность, описанная около треугольника AKC , пересекает прямую BC повторно в точке M .

а) Докажите, что $AK = BM$.

б) Найдите площадь четырехугольника $AKMC$, если площадь треугольника ABC равна 121 и $AB : BC = 4 : 7$.

42. Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC , а также его высоты CH .

а) Докажите, что $\angle AOC = 90^\circ$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BO = 7$, $AC = 16$.