1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ.

а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60°$.

2. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA.

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45°$.

3. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

4. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB. Касательная к окружности, проведённая в точке B, пересекает эту прямую в точке K.

а) Докажите, что треугольник BCK — равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{4}$.

5. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N.

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM, если $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{4}{3}$.

6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а BH — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.

б) Найдите BH, если $AB = 8,\ BC = 9,\ BH = BO$.

7. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а BH — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.

б) Найдите BH, если $AB = 16,\ BC = 18,\ BH = BO$.

8. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O, величина угла AOC составляет 120°.

а) Докажите, что около четырехугольника $BDOE$ можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 4$, а $\angle BED = 75°$.

9. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около ΔABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь ΔAHO, если $BC = 6\sqrt{3},\ \angle ABC = 45°$.

10. В треугольнике ABC угол A равен 120°. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}, \angle ABC = 45°$.

11. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = 3,\ \angle ABC = 15°$.

12. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке A_1, биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке B_1, биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке C_1.

а) Докажите, что угол $A_1BB_1 = 45°$.

б) Известно, что $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 60°$. Найдите B_1C_1.

13. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_1 и CH_2, затем провели луч HM, который пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке K, где M — середина AC, а H — точка пересечения высот.

а) Докажите, что $HM = MK$.

б) Найдите площадь треугольника BCK, если $\angle ABC = 60°$, $\angle BAC = 45°$, $AC = 1$.

14. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BAH = \angle BB_1C_1$.

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до стороны BC, если $B_1C_1 = 12$ и $\angle BAC = 60°$.

15. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Окружность, описанная около треугольника ACD пересекает сторону AB в точке E.

а) Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника CDE, если $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 6$.

16. На окружности с центром O и диаметром MN, равным 34, взята точка K на расстоянии 15 от этого диаметра. Хорда KE пересекает радиус OM в точке F под углом, равным $\arccos\frac{4}{5}$.

а) Докажите, что $KF : FE = 125 : 29$.

б) Найдите площадь треугольника KEN.

17. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Отрезок AP — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.

б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M. Найдите длину отрезка MC_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120°$.

18. В треугольнике KLM биссектрисы внешних углов при вершинах K и M пересекаются в точке N. Через точки K, N и M проведена окружность с центром в точке O.

а) Докажите, что точки K, L, M и O лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, если площадь треугольника KMO равна $27\sqrt{3}$, а угол KLM равен 120°.

19. Высота BH треугольника ABC в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса описанной около треугольника ABC окружности с центром O.

а) Доказать, что прямая, проходящая через точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и BC соответственно, проходит через точку O.

б) Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $AB = 6$, $BC = 3\sqrt{2}$.

20. В треугольнике ABC угол C — тупой, угол B равен 45° и AH — высота. Прямая AH пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D.

а) Докажите, что дуги BC и DA равны.

б) Найдите BC, если $AC = 8$ и площадь треугольника BDH равна 9.

21. Дан треугольник ABC. Точка O — центр вписанной в него окружности. На стороне BC отмечена такая точка M, что $CM = AC$ и $BM = AO$.

а) Докажите, что прямые AB и OM параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если угол ACB прямой и $AC = 4$.

22. В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle ACB = 85^\circ$.

а) Докажите, что $BM = CN$.

б) Прямые BC и MN пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника BDN, если его высота BH равна 6.

23. В треугольнике ABC угол C острый, угол B равен 45° и AH — высота. Прямая AH пересекает описанную около треугольника окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

б) Найдите AC, если $CB = 8$ и площадь треугольника CAD равна 12.

24. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Точки O_1 и O_2 — центры вневписанных окружностей ω_1 и ω_2, касающихся отрезков AB и AC соответственно. Точка M — середина большей дуги BC окружности ω.

а) Докажите, что точка M лежит на прямой O_1O_2.

б) На биссектрисе угла BAC выбрана точка K такая, что $AK^2 = AO_1 \cdot AO_2$. Найдите радиус описанной окружности треугольника BKC, если сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2 равна $5\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

25. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C продолжение биссектрисы CK этого треугольника (точка K лежит на гипотенузе AB) пересекает его описанную окружность в точке L. Прямая, проходящая через точку L и середину гипотенузы AB, пересекает вторично описанную окружность треугольника ABC в точке M и пересекает катет BC в точке P.

а) Докажите, что прямая MK является касательной к описанной окружности треугольника BMP.

б) Найдите площадь треугольника MKP, если $AC = 3$ и $BC = 4$.

26. В остроугольном треугольнике ABC отмечены: H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, A_1 — середина BC. Луч A_1H пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D, причем $DH = 2A_1H$.

а) Докажите, что OH перпендикулярна DA_1.

б) Пусть дополнительно известно, что описанная окружность около треугольника OHA_1 касается AH. Найдите угол между прямыми AA_1 и BC.

27. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC, если $B_1C_1 = 6$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

28. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Касательная к окружности в точке C пересекает биссектрису угла ABC в точке K, причем $\angle BKC = \frac{1}{2}(3\angle BAC - \angle ACB)$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Известно, что $AC + AB = 4$, а сумма расстояний от центра окружности O до сторон AC и BC равна $\frac{7}{4}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

29. Отрезок BL — диаметр описанной окружности треугольника ABC, где $\angle B = 85^\circ$, $\angle C = 25^\circ$. Продолжение высоты BT треугольника ABC пересекает эту окружность в точке M.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle CAL$.

б) Найдите длину отрезка ML, если радиус описанной окружности равен $17\sqrt{2}$.

30. Сторона AC треугольника ABC в два раза больше стороны AB. Продолжение биссектрисы AL пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке P. Известно, что $BC = 6$, $LP = 2$.

а) Докажите, что прямые AC и BP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

31. Дан остроугольный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOC описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке P.

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

32. В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямые AC и KN параллельны.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $10\sqrt{6}$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 105^\circ$.

33. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 60^\circ$, проведены высоты AA_1 и CC_1. Известно, что $AC = 12\sqrt{3}$, а площадь треугольника A_1BC_1 равна $20\sqrt{3}$.

а) Докажите, что касательная, проведенная к описанной около треугольника ABC окружности в точке B, параллельна прямой A_1C_1.

б) Найдите площадь треугольника HA_1C_1, где H — ортоцентр треугольника ABC.