**1.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $CQ$.

а) Докажите, что угол $PAC$ равен углу $PQC$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60°$.

**2.** В остроугольном треугольнике $KMN$ проведены высоты $KB$ и $NA$.

а) Докажите, что угол $ABK$ равен углу $ANK$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABM$, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45°$.

**3.** Около остроугольного треугольника $ABC$ описана окружность с центром $O$. На продолжении отрезка $AO$ за точку $O$ отмечена точка $K$ так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

**4.** Около равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $BC$ описана окружность. Через точку $C$ провели прямую, параллельную стороне $AB$. Касательная к окружности, проведённая в точке $B$, пересекает эту прямую в точке $K$.

а) Докажите, что треугольник $BCK$ — равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $BCK$, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{4}$.

**5.** Точка $M$ — середина гипотенузы $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет $BC$ в точке $N$.

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников $ANB$ и $CBM$, если $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{4}{3}$.

**6.** Точка $O$ — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника $ABC$, а $BH$ — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы $ABH$ и $CBO$ равны.

б) Найдите $BH$, если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.

**7.** Точка $O$ — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника $ABC$, а $BH$ — высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы $ABH$ и $CBO$ равны.

б) Найдите $BH$, если $AB = 16$, $BC = 18$, $BH = BO$.

**8.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AD$ и $CE$ пересекаются в точке $O$, величина угла $AOC$ составляет 120°.

а) Докажите, что около четырехугольника $BDOE$ можно описать окружность.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если $BC = 4$, а $\angle BED = 75°$.

**9.** В остроугольном треугольнике $ABC$ $\angle A = 60°$. Высоты $BN$ и $CM$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около $\Delta ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь $\Delta AHO$, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45°$.

**10.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 120°. Прямые, содержащие высоты $BM$ и $CN$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника $AHO$, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.

**11.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 120° . Прямые, содержащие высоты $BM$ и $CN$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника $AHO$, если $BC = 3$, $\angle ABC = 15°$.

**12.** Прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $C$ вписан в окружность. Биссектриса угла $A$ пересекает описанную окружность в точке $A_1$, биссектриса угла $B$ пересекает описанную окружность в точке $B_1$, биссектриса угла $C$ пересекает описанную окружность в точке $C_1$.

а) Докажите, что угол $A_1BB_1 = 45°$.

б) Известно, что $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 60°$. Найдите $B_1C_1$.

**13.** В остроугольном треугольнике $ABC$ провели высоты $AH_1$ и $CH_2$, затем провели луч $HM$, который пересекает окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точке $K$, где $M$ — середина $AC$, а $H$ — точка пересечения высот.

а) Докажите, что $HM = MK$.

б) Найдите площадь треугольника $BCK$, если $\angle ABC = 60°$, $\angle BAC = 45°$, $AC = 1$.

**14.** В остроугольном треугольнике $ABC$ высоты $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $H$.

а) Докажите, что $\angle BAH = \angle BB_1C_1$.

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника $ABC$ до стороны $BC$, если $B_1C_1 = 12$ и $\angle BAC = 60°$.

**15.** В треугольнике $ABC$ биссектриса угла $A$ пересекает сторону $BC$ в точке $D$. Окружность, описанная около треугольника $ACD$ пересекает сторону $AB$ в точке $E$.

а) Докажите, что треугольник $CDE$ равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника $CDE$, если $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 6$.

**16.** На окружности с центром $O$ и диаметром $MN$, равным 34, взята точка $K$ на расстоянии 15 от этого диаметра. Хорда $KE$ пересекает радиус $OM$ в точке $F$ под углом, равным $\arccos\frac{4}{5}$.

а) Докажите, что $KF : FE = 125 : 29$.

б) Найдите площадь треугольника $KEN$.

**17.** Высоты $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Отрезок $AP$ — диаметр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

а) Докажите, что прямая $HP$ пересекает отрезок $BC$ в его середине.

б) Луч $PH$ вторично пересекает окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точке $M$. Найдите длину отрезка $MC_1$, если расстояние от центра этой окружности до прямой $BC$ равно 4, $\angle BPH = 120°$.

**18.** В треугольнике $KLM$ биссектрисы внешних углов при вершинах $K$ и $M$ пересекаются в точке $N$. Через точки $K$, $N$ и $M$ проведена окружность с центром в точке $O$.

а) Докажите, что точки $K$, $L$, $M$ и $O$ лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $KLM$, если площадь треугольника $KMO$ равна $27\sqrt{3}$, а угол $KLM$ равен 120°.

**19.** Высота $BH$ треугольника $ABC$ в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса описанной около треугольника $ABC$ окружности с центром $O$.

а) Доказать, что прямая, проходящая через точки $K$ и $M$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $H$ на стороны $AB$ и $BC$ соответственно, проходит через точку $O$.

б) Найдите радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности, если $AB = 6$, $BC = 3\sqrt{2}$.

**20.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ — тупой, угол $B$ равен 45° и $AH$ — высота. Прямая $AH$ пересекает описанную около треугольника $ABC$ окружность в точке $D$.

а) Докажите, что дуги $BC$ и $DA$ равны.

б) Найдите $BC$, если $AC = 8$ и площадь треугольника $BDH$ равна 9.

**21.** Дан треугольник $ABC$. Точка $O$ — центр вписанной в него окружности. На стороне $BC$ отмечена такая точка $M$, что $CM = AC$ и $BM = AO$.

а) Докажите, что прямые $AB$ и $OM$ параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABMO$, если угол $ACB$ прямой и $AC = 4$.

**22.** В треугольнике $ABC$ продолжения высоты $CC_1$ и биссектрисы $BB_1$ пересекают описанную окружность в точках $N$ и $M$ соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle ACB = 85^\circ$.

а) Докажите, что $BM = CN$.

б) Прямые $BC$ и $MN$ пересекаются в точке $D$. Найдите площадь треугольника $BDN$, если его высота $BH$ равна 6.

**23.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ острый, угол B равен 45° и $AH$ — высота. Прямая $AH$ пересекает описанную около треугольника окружность в точке $D$.

а) Докажите, что прямые $AB$ и $CD$ параллельны.

б) Найдите $AC$, если $CB = 8$ и площадь треугольника $CAD$ равна 12.

**24.** Остроугольный треугольник $ABC$ вписан в окружность ω. Точки $O_1$ и $O_2$ — центры вневписанных окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$, касающихся отрезков $AB$ и $AC$ соответственно. Точка $M$ — середина большей дуги $BC$ окружности ω.

а) Докажите, что точка $M$ лежит на прямой $O_1O_2$.

б) На биссектрисе угла $BAC$ выбрана точка $K$ такая, что $AK^2 = AO_1 \cdot AO_2$. Найдите радиус описанной окружности треугольника $BKC$, если сумма радиусов окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ равна $5\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

**25.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ продолжение биссектрисы $CK$ этого треугольника (точка $K$ лежит на гипотенузе $AB$) пересекает его описанную окружность в точке $L$. Прямая, проходящая через точку $L$ и середину гипотенузы $AB$, пересекает вторично описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $M$ и пересекает катет $BC$ в точке $P$.

а) Докажите, что прямая $MK$ является касательной к описанной окружности треугольника $BMP$.

б) Найдите площадь треугольника $MKP$, если $AC = 3$ и $BC = 4$.

**26.** В остроугольном треугольнике $ABC$ отмечены: $H$ — точка пересечения высот, $O$ — центр описанной окружности, $A_1$ — середина $BC$. Луч $A_1H$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $D$, причем $DH = 2A_1H$.

а) Докажите, что $OH$ перпендикулярна $DA_1$.

б) Пусть дополнительно известно, что описанная окружность около треугольника $OHA_1$ касается $AH$. Найдите угол между прямыми $AA_1$ и $BC$.

**27.** Высоты $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника $ABC$, до стороны $BC$, если $B_1C_1 = 6$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

**28.** Треугольник $ABC$ вписан в окружность с центром в точке $O$. Касательная к окружности в точке $C$ пересекает биссектрису угла $ABC$ в точке $K$, причем $\angle BKC = \frac{1}{2}(3\angle BAC - \angle ACB)$.

а) Докажите, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

б) Известно, что $AC + AB = 4$, а сумма расстояний от центра окружности $O$ до сторон $AC$ и $BC$ равна $\frac{7}{4}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**29.** Отрезок $BL$ — диаметр описанной окружности треугольника $ABC$, где $\angle B = 85^\circ$, $\angle C = 25^\circ$. Продолжение высоты $BT$ треугольника $ABC$ пересекает эту окружность в точке $M$.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle CAL$.

б) Найдите длину отрезка $ML$, если радиус описанной окружности равен $17\sqrt{2}$.

**30.** Сторона $AC$ треугольника $ABC$ в два раза больше стороны $AB$. Продолжение биссектрисы $AL$ пересекает описанную около треугольника $ABC$ окружность в точке $P$. Известно, что $BC = 6$, $LP = 2$.

а) Докажите, что прямые $AC$ и $BP$ параллельны.

б) Найдите площадь треугольника $ABC$.

**31.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. Известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$. Вокруг треугольника $AOC$ описана окружность, которая пересекает сторону $BC$ в точке $P$.

а) Докажите, что треугольники $ABC$ и $PAC$ подобны.

б) Найдите $AB$, если $BC = 6$ и $AC = 4$.