1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

а) Докажите, что плоскость BA_1C_1 и прямая B_1D перпендикулярны.

б) Найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямые B_1D и AC перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

3. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен $\arccos\frac{7}{25}$.

б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

4. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

а) Докажите, что высота пирамиды, проведенная к боковой грани, больше чем высота пирамиды, проведенная к основанию.

б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$

а) Докажите, что плоскости AB_1D_1 и A_1BC перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскости A_1BD и B_1CD_1 параллельны.

б) Пусть дополнительно известно, что параллелепипед прямоугольный, кроме того $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$. Найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD, проведённые к стороне BD, имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка D — середина ребра BB_1.

а) Пусть прямые C_1D и BC пересекаются в точке E. Докажите, что угол EAC — прямой.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADC_1.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

11. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб с острым углом $A = 60^\circ$.

а) Докажите, что $AD_1 = DB_1$.

б) Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD, если высота призмы равна 5, а ребро основания равно 4.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка A_1K, где K — середина ребра BC.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

14. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро SD равно 8.

15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1.

а) Докажите, что плоскость ADB_1 делит объем призмы пополам.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

16. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и A_1B_1C параллельна основаниям призмы.

б) Найдите угол между плоскостями ABC_1 и A_1B_1C, если известно, что $AC = 1, BC = 2, AB = \sqrt{5}, CC_1 = 3$.

17. Дана правильная треугольная пирамида.

а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.

б) Пусть известно, что косинус угла между боковой гранью и основанием равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

18. Дана правильная треугольная пирамида.

а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.

б) Пусть косинус угла между боковой гранью и основанием равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.

б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB, если $SB = BC$.

20. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что P — середина BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если $SD = 9$.

21. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB.

а) Докажите, что $SA = SC$.

б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC, если $AB = 30$, $SC = 17$, $CB = 24$.

22. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями B_1CE_1 и ABC.

23. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$. Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если ребро $SD = 4$.

24. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании, $AB = 6$ и $BC = 6\sqrt{2}$. Высота пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей основания. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро $SD = 12$.