1. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

2. Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причём все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

3. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_N и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ..., b_M совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

4. Дана последовательность из нескольких натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

5. Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 прозвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

6. Каждое из чисел 5, 6, . . ., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, . . ., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

7. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

8. В ряд выписаны числа: $1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят получившуюся сумму.

Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 50$?

в) 0, если $N = 80$?

г) 5, если $N = 90$?

9. Найдите все целые значения m и k такие, что $3^m + 3^{2m} + 3^{3m} + \ldots + 3^{k \cdot m} = 2010$.

10. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

11. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отлично от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть десять членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами

12. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

13. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида $\frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?