

1. а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что все грани тетраэдра $ACB_1 D_1$ — равные треугольники (тетраэдр, обладающий таким свойством, называют *равногранным*).

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8, AB = 6, BC = 15$.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 21\sqrt{3}, SC = 29$. Точки M и N — середины рёбер AS и BC соответственно.

а) Докажите что отрезок MN делится пополам высотой пирамиды, проведенной из вершины S .

б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN .

3. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , где $AB = AC = 5$ и $BC = 8$. Высота призмы равна 3.

а) Докажите, что треугольник $A_1 BC$ остроугольный.

б) Найдите угол между прямой $A_1 B$ и плоскостью BCC_1 .

4. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}, SB = 3\sqrt{3}, SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

5. а) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что все грани тетраэдра $ACB_1 D_1$ — равные треугольники (тетраэдр, обладающий таким свойством, называют *равногранным*).

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4, A_1 D_1 = 6, C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины рёбер AB и $B_1 C_1$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}, SC = 25$. M — середина ребра SA .

а) Докажите, что проекции точек S и M на плоскость основания делят высоту AN треугольника ABC на три равные части.

б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN .

7. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник $ABC, AB = AC = 5, BC = 8$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра $B_1 C_1$.

а) Докажите, что плоскость $BA_1 M$ перпендикулярна плоскости BCC_1 .

б) Найдите угол между прямой $A_1 B$ и плоскостью BCC_1 .

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны $AB = 2, AD = AA_1 = 1$.

а) Пусть $B_1 E$ — высота треугольника $BB_1 C_1$. Докажите, что AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1 .

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

9. а) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина пирамиды, прямая SC перпендикулярна прямой AB .

б) Пусть высота SO составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что AC' перпендикулярна прямой BE .

б) Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD' .

11. В правильном тетраэдре $ABCD M$ — середина ребра AD .

а) Докажите, что проекция точки M на плоскость BCD делит высоту DN треугольника BCD в отношении $1 : 2$, считая от вершины D .

б) Найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD .

12. Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Точка M — середина бокового ребра пирамиды AP .

- Докажите, что плоскость, проходящая через точки B и M и перпендикулярная плоскости BDP , делит высоту пирамиды пополам.
- Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP .

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Точка M — середина ребра BC .

- Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.
- Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 .

14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α , параллельная ребру MC .

- Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD .
- Найдите угол между плоскостью α и прямой AC .

15. Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = \sqrt{17}$, $AB = AC = \sqrt{29}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

- Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
- Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC .

16. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

- Докажите, что KM перпендикулярно AC .
- Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC , если $AB = 12$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.

17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра A_1C_1 , а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1 .

- Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB , лежит на отрезке OC_1 .
- Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB .

18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 6\sqrt{3}$. На ребре BC отмечена точка M так, что $BC : MC = 3 : 1$, а на ребре AC отмечена точка N так, что $AN : NC = 2 : 1$. Точка K — середина ребра AB , точка O — центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

- Докажите, что прямая OK параллельна плоскости MNC_1 .
- Найти угол между прямой OK и плоскостью основания, если площадь треугольника MNC_1 равна $6\sqrt{3}$.

19. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — центр грани ABD , точка M — центр грани ACD .

- Докажите, что прямые BC и KM параллельны.
- Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABD .

20. Основание $ABCD$ призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

- Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1 .
- Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B , а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

21. Точка M середина ребра AB правильного тетраэдра $DABC$.

- Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD .
- Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD .

22. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 8, а угол при вершине A равен 60° . Известно, что $SA = 15$, $SC = \sqrt{33}$ и, кроме того, $SB = SD$.

- Докажите, что SC — высота пирамиды.
- Найдите угол между плоскостью ASC и ребром SB .

23. На ребрах BS и CS правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания $AD = 10$ и боковым ребром $SA = 5\sqrt{6}$ взяты точки K и M соответственно так, что $SK : BK = CM : SM = 3 : 2$.

- Докажите, что прямые KM и SC взаимно перпендикулярны.
- Найдите угол между прямой KM и плоскостью основания пирамиды.

24. Точка O — точка пересечения диагоналей грани CDD_1C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость DA_1C_1 пересекает диагональ BD_1 в точке F .

- Докажите, что $BF : FD_1 = A_1F : FO$.
- Точки M и N — середины ребер AB и AA_1 , соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью DA_1C_1 .

25. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно 4. Через точку A проведена плоскость α , перпендикулярная прямой DC_1 .

- Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $1 : 3$, считая от точки D .
- Найдите угол между прямой F_1D и плоскостью α .

26. Точка O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сечения параллелепипеда плоскостями AOB и BOC являются прямоугольниками, стороны AB и BC этих сечений в 3 раза меньше соответствующих больших сторон сечений.

- Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
- Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BOC .

27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны углы: $\angle C_1AA_1 = \alpha$, $\angle C_1AB = \beta$, $\angle C_1AD = \gamma$.

- Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$, если $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

28. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

- Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC .
- Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 9$, $AC = 12$ и $AA_1 = 3$.