1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что $BD_1 \perp AC$.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.

2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середины ребер BD, AC и AD, является прямоугольником.

б) Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что точки D_1, E и F_1 лежат на сфере с центром в точке B.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой F_1E_1.

4. Дана правильная треугольной призма $ABCA_1B_1C_1$

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через прямую AB_1 и центр грани ACC_1A_1, делит объем призмы в отношении 2 : 1.

б) Пусть высота призмы равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2.

а) Докажите, что объем пирамиды $A_1BCC_1B_1$ вдвое больше объема пирамиды $ACBC_1$.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1.

6. Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

а) Докажите, что объем пирамиды A_1BDC_1 втрое меньше объема параллелепипеда.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и A_1B_1 соответственно.

а) Докажите, что $A_1C_1 \perp MT$.

б) Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT.

8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.

а) Докажите, что прямые SE и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA.

9. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, отметили середину ребра CD — точку E.

а) Докажите, что плоскость ABE перпендикулярна ребру CD.

б) Найдите расстояние от точки A до прямой BE.

10. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) Докажите, что прямые AS и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA.

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1.

а) Докажите, что точки A_1 и B равноудалены от плоскости AB_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

12. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1.

а) CE — высота треугольника ABC. Докажите, что угол B_1EC прямой.

б) Найдите высоту призмы.

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1.

а) Докажите, что расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1 равно расстоянию середины отрезка BC_1 до прямой, проходящей через середину отрезка AD_1 и вершину B_1.

б) Найдите это расстояние.

15. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB.

а) Докажите, что плоскости ACL и MDB перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

16. Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

а) Докажите, что расстояние от вершины D_1 до прямой A_1B больше, чем расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4.

а) Докажите, что плоскости CD_1E_1 и AEE_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра равны 1.

а) Докажите, что прямая BF_1 перпендикулярна прямой F_1E_1.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.

19. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$.

а) Докажите, что сечение, проходящее через середину бокового ребра BD и точки M и T (середины ребер AC и AB соответственно), является прямоугольником.

б) Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT.

20. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середину ребра AD и точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT.

21. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°.

а) Докажите, что прямые AC_1 и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

22. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 6$, $BC = 3$.

23. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P.

б) Пусть H — проекция точки Q на прямую B_1P. Найдите PH, если $AB = 12$.

24. В прямом круговом цилиндре проведена образующая NN_1, точка N лежит в нижнем основании. Отрезок KM_1 пересекает ось цилиндра, а точки K и M_1 лежат на окружностях нижнего и верхнего основания соответственно.

а) Докажите, что треугольник KNM_1 прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой KM_1, если $KN = 9$, $NN_1 = 20\sqrt{3}$, $N_1M_1 = 20$.

25. Точка O — центр основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$. Точки K, L, M, T — середины отрезков AF, SF, SD, MK соответственно.

а) Докажите, что точка T лежит на отрезке LO.

б) Найдите CT, если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 48.

26. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 6, на ребре AA_1 взята точка M так, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{2}$. На ребре D_1C_1 взята точка N так, что $\frac{D_1N}{NC_1} = \frac{1}{2}$.

а) Докажите, что прямые MB_1 и CN перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой CN.

27. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL соответственно пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей.

а) Докажите, что $AM : MD = 5 : 1$.

б) Найдите длину отрезка MN, если сторона куба равна 3.