

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.
 - а) Докажите, что $BD_1 \perp AC$.
 - б) Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$.
 - а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середины ребер BD , AC и AD , является прямоугольником.
 - б) Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT , где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1.
 - а) Докажите, что точки D_1 , E и F_1 лежат на сфере с центром в точке B .
 - б) Найдите расстояние от точки B до прямой $F_1 E_1$.

4. Дана правильная треугольной призма $ABCA_1 B_1 C_1$
 - а) Докажите, что плоскость α , проходящая через прямую AB_1 и центр грани $ACC_1 A_1$, делит объем призмы в отношении $2 : 1$.
 - б) Пусть высота призмы равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2.
 - а) Докажите, что объем пирамиды $A_1 BCC_1 B_1$ вдвое больше объема пирамиды $ACBC_1$.
 - б) Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 .

6. Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.
 - а) Докажите, что объем пирамиды $A_1 BDC_1$ втрое меньше объема параллелепипеда.
 - б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .

7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.
 - а) Докажите, что $A_1 C_1 \perp MT$.
 - б) Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT .

8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2.
 - а) Докажите, что прямые SE и AC перпендикулярны.
 - б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

9. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, отметили середину ребра CD — точку E .
 - а) Докажите, что плоскость ABE перпендикулярна ребру CD .
 - б) Найдите расстояние от точки A до прямой BE .

10. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - а) Докажите, что прямые AS и BD перпендикулярны.
 - б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1.
 - а) Докажите, что точки A_1 и B равноудалены от плоскости $AB_1 C_1$.
 - б) Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

12. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани $B_1 C$ составляет угол 30° с плоскостью $AA_1 B_1$.
 - а) CE — высота треугольника ABC . Докажите, что угол $B_1 EC$ прямой.
 - б) Найдите высоту призмы.

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды.

- а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .
- б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

14. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1.

- а) Докажите, что расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$ равно расстоянию середины отрезка BC_1 до прямой, проходящей через середину отрезка AD_1 и вершину B_1 .
- б) Найдите это расстояние.

15. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB .

- а) Докажите, что плоскости ACL и MDB перпендикулярны.
- б) Найдите высоту данной пирамиды.

16. Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

- а) Докажите, что расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 B$ больше, чем расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .
- б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .

17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4.

- а) Докажите, что плоскости $CD_1 E_1$ и AEE_1 перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.

18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра равны 1.

- а) Докажите, что прямая BF_1 перпендикулярна прямой $F_1 E_1$.
- б) Найдите расстояние от точки B до прямой $E_1 F_1$.

19. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$.

- а) Докажите, что сечение, проходящее через середину бокового ребра BD и точки M и T (середины ребер AC и AB соответственно), является прямоугольником.
- б) Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT .

20. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$.

- а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середину ребра AD и точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно, является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT .

21. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60° .

- а) Докажите, что прямые AC_1 и BD перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

22. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

- а) Докажите, что $AA_1 = AC$.
- б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 6$, $BC = 3$.

23. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямая BQ перпендикулярна прямой $B_1 P$.
- б) Пусть H — проекция точки Q на прямую $B_1 P$. Найдите PH , если $AB = 12$.

24. В прямом круговом цилиндре проведена образующая NN_1 , точка N лежит в нижнем основании. Отрезок KM_1 пересекает ось цилиндра, а точки K и M_1 лежат на окружностях нижнего и верхнего основания соответственно.

а) Докажите, что треугольник KNM_1 прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой KM_1 , если $KN = 9$, $NN_1 = 20\sqrt{3}$, $N_1M_1 = 20$.

25. Точка O — центр основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$. Точки K, L, M, T — середины отрезков AF, SF, SD, MK соответственно.

а) Докажите, что точка T лежит на отрезке LO .

б) Найдите CT , если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 48.

26. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 6, на ребре AA_1 взята точка M так, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{2}$. На ребре D_1C_1 взята точка N так, что $\frac{D_1N}{NC_1} = \frac{1}{2}$.

а) Докажите, что прямые MB_1 и CN перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой CN .

27. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D . Отрезок MN с концами на прямых AD и KL соответственно пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей.

а) Докажите, что $AM : MD = 5 : 1$.

б) Найдите длину отрезка MN , если сторона куба равна 3.