

1. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO , если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

2. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

3. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

4. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q . При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BQP , если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q .

а) Докажите, что отрезки PQ и OC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника OBC , если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2m$.

6. Первая окружность с центром O , вписанная в равнобедренный треугольник KLM , касается боковой стороны KL в точке B , а основания ML — в точке A . Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

7. В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M .

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

8. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла C . В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 20$ и $BC = 15$.

9. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , AB и AC в точках K , L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A .

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC .

б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB , а T — такая точка на отрезке PQ , что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT .

10. Угол BAC треугольника ABC равен α . Сторона BC является хордой такой окружности с центром O и радиусом R , которая проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 6$, $\alpha = 60^\circ$.

11. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке K . К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе AP треугольника и пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

- Докажите, что угол MOC равен углу NOK .
- Найдите периметр треугольника ABC , если отношение площадей трапеции $AMNP$ и треугольника ABC равно $2 : 7$, $MN = 2$, $AM + PN = 6$.

12. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D .

- Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника BED , если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

13. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямая BO пересекает окружность, описанную около треугольника CON вторично в точке P .

- Докажите, что точка P лежит на прямой MN .
- Найдите площадь треугольника ABP , если площадь треугольника ABC равна 24.

14. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK .

- Докажите, что $\frac{AK}{AB} = \frac{CK}{BC}$.
- Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 13$, $BC = 7$ и $BK = \frac{7\sqrt{13}}{4}$.

15. В треугольник ABC вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 8$ и $CM = 12$.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

16. В прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$ вписана окружность с центром O , касающаяся сторон BC , AC и AB треугольника в точках R , Q , P соответственно.

- Докажите, что $AO \cdot BO \cdot CO = 10$.
- Найдите площадь треугольника PQR .

17. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , AB и AC в точках K , L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A .

- Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC .
- Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB , а T — такая точка на отрезке PQ , что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT .

18. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете AC взята точка M . Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N .

- Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
- Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 8$, $AM : MC = 1 : 3$.

19. В треугольнике ABC $AB = 3$, $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырёхугольника $ABLM$ равна 2, $LM = 1$.

- Докажите, что треугольник KNC равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника KNC .

20. В каждый угол равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = 10$, $AC = BC = 13$, вписана окружность единичного радиуса, точки O_1 , O_2 и O_3 центры этих окружностей. Найдите:

- радиус окружности, вписанной в треугольник ABC ;
- площадь треугольника O_1, O_2, O_3 .

21. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит медиану BM на три равные части.

- Докажите, что $BC : CA : AB = 5 : 10 : 13$.
- Найдите радиус вписанной окружности, если $BM = 12$.

22. На стороне KM остроугольного треугольника PKM ($PK \neq PM$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту PS в точке T , $PS = 8$, $TS = 6$, H — точка пересечения высот треугольника PKM .

- Найдите PH .
- Полуокружность пересекает стороны PK и PM в точках L и N соответственно. Найдите коэффициент подобия треугольников PKM и PNL , если радиус полуокружности равен 20.

23. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC , в котором $\cos \angle ABC = 0,8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC , параллельной стороне AC .

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите площадь треугольника ABC .

24. Окружность вписана в треугольник ABC , P — точка касания окружности со стороной AB , точка M — середина AB .

- Докажите, что $MP = \frac{|AC - CB|}{2}$.
- Найдите углы треугольника, если $MC = MA$, $AC > BC$, $MP = \frac{r}{2}$.

25. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AB опущена высота CH . В треугольнике ACH проведена биссектриса CE угла ACH .

- Докажите, что треугольник BCE — равнобедренный.
- Найдите EO , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , и известно, что $AC = 8$, $BC = 6$.

26. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC . Точки I и J — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD соответственно.

- Докажите, что прямые BI и DJ параллельны.
- Найдите IJ , если $AC = 12$, $\cos \angle BDC = \frac{3}{7}$.

27. Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

- Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB .
- Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите ее радиус, если $AX = XY = 2$, а $AB = 4$.

28. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.
- Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1 = 9$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

29. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC . Касательная к окружности пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно.

- Докажите, что сумма углов AOD и BOE равна 180° .
- Найдите DE , если $AC = BC$, радиус окружности равен 3, $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \angle BAC \right) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, а разность углов AOD и BOE равна 60° .

30. Биссектриса AD большего угла треугольника ABC со сторонами 24, 40 и 56 делит его на два треугольника, в каждый из них вписана окружность.

- Докажите, что радиусы этих окружностей относятся как 9 : 10.
- Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой AD .

31. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,6$ и сторона $AC = 24$.

32. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно так, что $BD + CE = BC$, точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC .

а) Докажите, что точки A, E, I и D лежат на одной окружности.

б) Точка D' симметрична точке D относительно прямой AI . Найдите радиус описанной окружности треугольника EDD' , если $D'E = 2$, а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен $\frac{9}{2}$.

33. В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M .

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

34. Периметр треугольника ABC равен 24. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

а) Докажите, что $AC = 6$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.

35. Вписанная в треугольник ABC окружность ω_1 касается стороны BC в точке N так, что $CN : NB = 1 : 2$. Окружность ω_2 касается стороны BC в точке M так, что $BM : MC = 1 : 2$, а также касается продолжения стороны AC за точку C .

а) Докажите, что прямая AB касается окружности ω_2 .

б) Найдите угол BAC , если $BC \perp AC$.

36. В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Площадь треугольника ABC равна $1,5 + \sqrt{3}$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.