1. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 1 и 4.

2. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

3. Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E, F последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

5. Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

6. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

7. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD, $AB = 12$, $BE : EC = 4 : 5$.

а) Докажите, что треугольник ACD подобен треугольнику ABE.

б) Найдите BC.

8. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая l пересекает окружность ω в точках A и D, окружность ω_1 — в точках A и E, а окружность ω_2 — в точках M и N.

а) Докажите, что $MD = NE$.

б) Найдите радиус круга, касающегося окружностей ω, ω_1 и ω_2, если известно, что $AC = 10$, $BC = 6$.

9. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N, а вторую в точке M_1.

а) Докажите, что точка N — середина отрезка MM_1.

б) Найдите длину отрезка MN, если известно, что $CN = 6$, $DN = 13{,}5$.

10. Две окружности имеют общий центр O. На окружности большего радиуса выбрана точка F.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки F до концов диаметра меньшей окружности не зависит ни от выбора точки F, ни от выбора диаметра.

б) Известно, что радиусы окружностей равны 10 и 24. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются концы диаметра меньшей окружности и точка F, тангенс угла F этого треугольника равен $\frac{1}{4}$.

11. К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

12. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

13. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD, если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

14. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

15. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая MK, пересекающая обе окружности в точках M и K, причем точка A находится между ними.

а) Докажите, что треугольники BMK и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой MK, если $O_1O_2 = 5$, $MK = 7$.

16. Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая касается меньшей окружности в точке A, а большей — в точке B, отличной от A. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке D, прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E.

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD.

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL, если радиусы окружностей равны 2 и 5.

17. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD, если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

18. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH.

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$.

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH, вторично пересекающей отрезок AC в точке P, а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH, вторично пересекающей отрезок BC в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2, если $AC = 22,\ BC = 18$.

19. Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D. Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E.

а) Докажите, что AE параллельно BD.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 8 и 15.

20. К окружности с диаметром $AB = 6$ проведена касательная BC так, что $BC = 3\sqrt{2}$. Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D. Точка E диаметрально противоположна точке D. Прямые ED и BC пересекаются в точке F.

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE$.

б) Найдите площадь треугольника FBE.

21. Две окружности пересекаются в точках A и K так, что их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A.

а) Докажите, что углы AKC и AKB равны.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BK = 1$, $CK = 4$, а тангенс угла CAB равен $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

22. В полуокружности с диаметром MN расположены две окружности с центрами O_1 и O_2, касающиеся друг друга, полуокружности и прямой MN (при этом точки касания с полуокружностью — это соответственно A и B).

а) Докажите, что прямые O_1A, O_2B и MN пересекаются в одной точке.

б) Радиусы окружностей равны 2 и 5. Найдите радиус полуокружности.

23. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает ее в точке K, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает ее в точке L.

а) Пусть AA_1 тоже диаметр окружности. Докажите, что углы DLK и A_1D_1D равны.

б) Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если $\angle ADB = 3\angle BDC$.

24. Окружность ω_1 касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC треугольника ABC за точки A и C соответственно, M — точка ее касания с прямой BC. Окружность ω_2 касается стороны AB и продолжений сторон AC и BC за точки A и B соответственно, N — точка ее касания с прямой BC.

а) Докажите, что $CM = BN$.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей ω_1 и ω_2, если $AC = \sqrt{11}$, $AB = \sqrt{14}$, $BC = 5$.

25. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K.

а) Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

б) Найдите длину отрезка AK, если периметр треугольника ABC равен 30, а длина стороны BC равна 10.

26. В прямоугольнике $ABCD$, в котором $AD = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, а $AB = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K, радиус которой равен 2, касается сторон AB и AD. Окружность с центром в точке L, радиус которой равен 1, касается стороны CD и первой окружности.

а) Докажите, что точки A, K и L лежат на одной прямой.

б) Найдите площадь треугольника CLM, если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

27. Из вершины тупого угла C треугольника ABC проведена высота CH. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а прямая CH — эту окружность в точке D.

а) Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC.

б) Найдите отношение MN к AB, если известно, что $CM : MA = 2 : 25$ и $CN : NB = 2 : 1$.

28. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AE$. Отрезок BE пересекает AC в точке M, а отрезок AD в точке N.

а) Докажите, что точки C, D, M, N лежат на одной окружности.

б) Точка O — центр описанной вокруг треугольника CMD окружности. Найдите радиус этой окружности, если $AO = 12$, $AB = 4$.

29. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1, и B_1AC_1, пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1, и B_1AC_1.

30. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена прямая, пересекающая вторично первую из окружностей в точке A, а вторую — в точке B. Через точку Q также проведена прямая, пересекающая вторично первую окружность в точке C, а вторую — в точке D.

а) Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

б) Найдите наибольшее возможное значение суммы длин отрезков AB и CD, если расстояние между центрами данных окружностей равно 1.

31. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

32. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Длина радиуса первой окружности равна 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна 64π.

а) Докажите, что длины радиусов окружностей образуют геометрическую прогрессию.

б) Найдите сумму длин второй и третьей окружностей.

33. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром в точке O касается стороны BC в точке K. Окружность с центром в точке O_1 касается стороны BC в точке L, а также касается продолжения сторон AC и AB.

а) Докажите, что $BL = CK$

б) Найдите расстояние OO_1, если известно, что $AC = 7$, $BC = 24$ и $AB = 25$.

34. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. В треугольники AMB, BMC, CMD и AMD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ равна $\frac{O_1O_3 \cdot O_2O_4}{2}$.

б) Пусть прямая O_2O_4 пересекает стороны BC и AD в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $AQ : QD$, если известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, а отношение площадей треугольников CMP и BMP равно 3 : 2.

35. Окружность касается одной из сторон прямого угла с вершиной D в точке E и пересекает вторую сторону в точках A и B (точка A лежит между B и D). В окружности проведён диаметр AC.

а) Докажите, что отрезок BC вдвое больше отрезка DE.

б) Найдите расстояние от точки E до прямой AC, если $AD = 4$ и $AB = 5$.

36. Две окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом. Из точки O_1 проведена касательная O_1K ко второй окружности (K — точка касания), а из точки O_2 проведена касательная O_2L к первой окружности (L — точка касания), точки K и L лежат по разные стороны от прямой O_1O_2.

а) Докажите, что $\angle O_1KL = \angle O_1O_2L$.

б) Найдите радиус меньшей окружности, если дополнительно известно, что он в 4 раза меньше радиуса большей окружности, а площадь четырехугольника O_1KO_2L равна $54 + 9\sqrt{6}$.

37. Окружности ω_1 и ω_2 радиусов 4 и 1 соответственно касаются внешним образом в точке A. Через точку B, лежащую на окружности ω_1, проведена прямая, касающаяся окружности ω_2 в точке M.

а) Докажите, что отношение отрезков прямой AB, отсекаемых окружностями, равно отношению их радиусов.

б) Найдите BM, если известно, что $AB = 2$.

38. Две касательные к окружности, CA и CB, пересекаются в точке C (A и B — точки касания). Вторая окружность проходит через точку C, касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M, отличной от B.

а) Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCM, если $BC = 10$, а синусы углов BAM и ABM равны соответственно 0,6 и $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

39. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC.

б) Найдите O_1O_2, если известно, что радиусы окружностей равны 10 и 15, а $AC = 24$.

40. Дан угол величиной 120° с вершиной C. Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{3}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках A и B.

а) Докажите, что $OC = BC = CA$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

41. Радиусы двух окружностей с центрами O_1 и O_2, касающихся внешним образом в точке A, равны 6 и 3 соответственно. Их общая секущая, проведенная через точку A, пересекает первую окружность в точке B, вторую — в точке C.

а) Докажите, что $AB : BC = AO_1 : O_1O_2$.

б) Найдите длину отрезка касательной, проведенной из точки B ко второй окружности, если $AB = 4$.

42. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите BC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{7}$ и 3.

43. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена касательная к первой из этих окружностей, пересекающая вторую окружность в точке L, а через точку Q проведена касательная ко второй окружности, пересекающая первую окружность в точке M.

а) Докажите, что прямые PM и QL параллельны.

б) Найдите наименьшее возможное значение суммы длин отрезков PM и QL, если $PQ = 1$.

44. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$ и $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE, если $AD = 6$.

45. Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB, если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

46. К двум окружностям радиусов 2 и 1 проведены внешние касательные AB и CD, причем точки A и C лежат на меньшей окружности, а точки B и D — на большей. Прямая AD пересекает меньшую окружность в точке N, а большую — в точке M.

а) Докажите, что $AN = DM$.

б) Найдите площадь треугольника ABD, если дополнительно известно, что точки M и N делят отрезок AD на три равные части.

47. Две окружности с центрами O_1 и O_2 равных радиусов касаются внешним образом и вписаны в острые углы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Известно, что одна из окружностей касается гипотенузы AB в середине.

а) Докажите, что один из углов треугольника ABC равен 30°.

б) Окружность с центром O_1 касается катета AC в точке M, окружность с центром O_2 касается катета BC в точке N. Найдите площадь многоугольника $MCNO_2O_1$, если радиус окружностей равен 1.

48. Точка K лежит на отрезке MN. Прямая, проходящая через точку M, касается окружности с диаметром KN в точке A и пересекает окружность с диаметром MK в точках M и B. Продолжение отрезка AK пересекает окружность с диаметром MK в точке C.

а) Докажите, что прямые CM и AN параллельны.

б) Найдите площадь треугольника CKN, если $BM = 6$ и $AB = 30$.

49. Через точку C на окружности с центром O проведена касательная, пересекающая продолжение диаметра AD за точку D в точке S. Прямая, проходящая через середину хорды CD и точку S пересекает окружность в точках B и G $(GB < BS)$, а отрезки AC, CO и CD — в точках T, E и F соответственно. Прямая BD пересекает отрезки AC и CO точках K и P соответственно, причем BC параллельна AD.

а) Докажите, что $EK : AD = 1 : 6$.

б) Найдите площадь четырехугольника $KTEP$, если радиус окружности равен 4.

50. На окружности отмечены точки A, B, C и D так, что $AB = BD$, $\angle ABC = 90°$.

а) Докажите, что $DM = BC$, если BM — диаметр окружности.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если радиус окружности равен 4, а точка пересечения диагоналей AC и BD делит AC в отношении 1 : 3, считая от вершины C.

51. В окружности с центром O проведен диаметр MN, отмечены точка K — середина дуги MN, точка A — середина хорды MK и точка B — середина дуги KN.

а) Докажите, что $AB : MN = \sqrt{3} : \sqrt{8}$.

б) На отрезке AB как на стороне построен прямоугольник $ABCD$ так, что его вершина C лежит на окружности. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если радиус окружности равен $3\sqrt{7}$.

52. В окружности радиусом R проведены хорды KL и MN, перпендикулярные друг другу и пересекающиеся в точке F.

а) Докажите, что при этих условиях выполняется равенство $KN^2 + ML^2 = 4R^2$.

б) Найдите радиус окружности R, если $KF = 3$, $FM = 8$, $FN = 6$.

53. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность ω_1 в точке A, а окружность ω_2 — в точке B. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AB, пересекает ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно.

а) Пусть H_1 и H_2 — ортоцентры треугольников AQC и BQD соответственно. Докажите, что $H_1H_2 = 2O_1O_2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACDB$, если известно, что радиусы окружностей равны 13 и 15, расстояние между центрами окружностей равно 14, а прямая AB параллельна линии центров.