1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCM и AMD равны соответственно r и R.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

3. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.

4. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

5. В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 10$, $CA = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

6. Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 7$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

8. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

9. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

10. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

11. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, вершинами которого являются точки O_1, O_2, B и C, если $\angle ABO_1 = 15°$.

12. Четырехугольник $KLMN$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые KL и NM пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPN, если известно, что $\angle KPN = \varphi$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники KPN и LMP равны соответственно r и R.

13. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

14. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

15. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

16. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 13$, $MN = 6$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 3 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

17. Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$. Проведена окружность радиуса $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите CM.

18. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в другую окружность. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если известно, что $AB = a$ и $CD = b$.

19. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 39$, $BC = 26$. Длины боковых сторон $AB = 5$, $CD = 12$. Окружность проходит через точки A и B и касается прямой CD.

а) Докажите, что продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под прямым углом.

б) Найдите радиус окружности.

20. Окружность проходит через вершины C и D трапеции $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке B и пересекает большее основание AD в точке K. Известно, что $AB = 5\sqrt{3},\ BC = 5,\ KD = 10.$

а) Докажите, что $BD = \sqrt{AD \cdot BC}.$

б) Найдите радиус этой окружности.

21. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что $CD : BC = 3 : 1$.

А) Докажите, что точка E равноудалена от прямых AD и AB.

Б) Найдите отношение площадей треугольников ADE и BCE.

22. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MNKL$ — прямоугольник, подобный исходному.

б) Найдите коэффициент подобия, если косинус угла между диагоналями исходного прямоугольника равен $\frac{7}{25}$.