1. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4.

а) Докажите, что сечение является равнобедренным остроугольным треугольником.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

2. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6.

а) Докажите, что сечение — равнобедренный остроугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

3. Основанием пирамиды является трапеция с основаниями 25 и 7 и острым углом $\arccos 0,6$. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом 60°.

а) Докажите, что существует точка M, одинаково удаленная от всех вершин пирамиды (центр описанной сферы).

б) Найдите объем данной пирамиды.

4. Шар касается основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ в точке B и ее бокового ребра SA.

а) Докажите, что центр шара лежит в плоскости, перпендикулярной ребру AC, и проходящей через его середину.

б) Найдите радиус шара, если сторона основания пирамиды равна 3, а боковое ребро равно 4.

5. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

6. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 5.

а) Докажите, что сечение конуса плоскостью ABP — равнобедренный остроугольный треугольник.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

7. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84.

а) Докажите, что сечение шара второй плоскостью является кругом.

б) Найдите радиус шара.

8. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 18 и 8. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 60°.

а) Докажите, что существует точка O (центр вписанной сферы), одинаково удаленная ото всех граней пирамиды.

б) Найдите площадь полной поверхности данной пирамиды.

9. Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

10. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

11. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

12. Прямоугольник $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, при этом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен $\sqrt{2}$.

13. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

14. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45°.

б) Найдите объём цилиндра.

15. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

16. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите,что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60°.

б) Найдите объём цилиндра.

17. В цилиндре на окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причём BB_1 — образующая цилиндра, а AC_1 пересекает его ось цилиндра.

а) Докажите, что угол $C_1BA = 90^\circ$.

б) Найдите площадь боковой поверхности, если $AB = 16$, $BB_1 = 5$, $B_1C_1 = 12$.

18. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 20$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 21$.

19. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 4\sqrt{6}$.

а) Докажите, что угол между прямыми BC и AC_1 равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки B до AC_1.

20. В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B — концы образующих, M — середина SA, N — точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB.

а) Докажите что ANO — прямой угол.

б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно что $AB = 10$.

21. Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причем A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB = 6$, $BC = 8$ и $AS = 5\sqrt{2}$.

22. Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причём прямая MN параллельна образующей конуса SB.

а) Докажите что $\angle ANO$ — прямой.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$.

23. Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

24. Основание ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина S расположена на оси O_1O_2 цилиндра (точка O_1 — центр верхнего основания, точка O_2 — центр нижнего основания). Объем цилиндра равен 21π, а объем пирамиды $3\sqrt{3}$.

а) Докажите, что $SO_1 : SO_2 = 3 : 4$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB, если радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{3}$.

25. Радиус основания конуса равен 12, а высота равна 5.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

26. Шар проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба.

а) Докажите, что сфера касается ребер в их серединах.

б) Найдите объем шара, если ребро куба равно 1.

27. Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $6\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

28. Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 1 : 3.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 4 : 1, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5.

29. Радиус основания конуса с вершиной S равен 8, а высота конуса SO равна $\sqrt{88}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а точки B и N лежат в плоскости основания конуса так, что отрезок SB — образующая конуса, а прямая MN параллельна SB.

а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости SON.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 10$.

30. Диаметр основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра.

а) Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как 5 : 12.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

31. На отрезке O_1O_2, соединяющем центры оснований кругового цилиндра, отмечены точки P и F так, что $O_1P : PF : FO_2 = 1 : 4 : 7$. В цилиндре расположены два конуса: первый с вершиной F, основанием которого является круг основания с центром O_1, второй — с вершиной P, основанием которого является круг основания с центром O_2.

а) Докажите, что боковые поверхности этих конусов пересекаются по окружности, радиус которой в 4 раза меньше радиуса основания цилиндра.

б) Найдите объем общей части этих конусов, если высота цилиндра равна 10, а радиус основания цилиндра равен 3.

32. Перпендикулярные и равные ребра AD и BC тетраэдра $ABCD$ являются диаметрами двух оснований цилиндра, длина образующей которого равна длине ребра BC.

а) Докажите, что осевое сечение цилиндра, проходящее через BC, делит высоту тетраэдра $ABCD$, опущенную на грань ABC, в отношении 5 : 3, считая от вершины D.

б) Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади полной поверхности тетраэдра.

33. Через вершину S конуса проведена плоскость, которая пересекает основание в точках A и B. Высота конуса SO равна $4\sqrt{3}$, дуга AB равна 90°, а хорда AB равна 8.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAB и плоскостью основания конуса равен 60°.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

34. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки K и M по одну сторону от диаметра основания AB так, что плоскости ASK и BSM наклонены к плоскости основания конуса под углами $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, причем точка M принадлежит дуге BK, не содержащей точку A. Тангенс угла наклона образующей конуса к плоскости основания равен $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$.

а) Докажите, что плоскость KMS наклонена к плоскости основания конуса под углом 60°.

б) Найдите площадь треугольника SKM, если радиус основания конуса равен 2.

35. Дан цилиндр, осевым сечением которого является прямоугольник, с центрами нижнего и верхнего оснований в точках O и O_1 соответственно. Плоскость α проходит через диаметр AB нижнего основания и имеет с верхним основанием ровно одну общую точку K.

а) Докажите, что проекция точки K на плоскость нижнего основания лежит на прямой, проходящей через точку O перпендикулярно AB.

б) Найдите расстояние от центра верхнего основания (точки O_1) до плоскости α, если радиус основания цилиндра равен 15, а высота цилиндра равна 20.

36. Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S. Точка M — середина хорды BC, AC — диаметр.

а) Докажите, что угол между прямой SM и плоскостью ABC равен углу между прямой AB и плоскостью SBC.

б) Найдите высоту конуса, если угол между прямой AB и плоскостью SBC равен 60°, $AC = 10$, $BC = 6$.

37. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки M и N, а на окружности верхнего основания отмечены точки M_1 и K_1 так, что прямая MM_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а прямая NK_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые MN и M_1K_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми NK_1 и MM_1, если известно, что $MN = 20$, $M_1K_1 = 15$.