

1. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что площадь боковой поверхности пирамиды относится к площади основания как  $\sqrt{7} : 2$ .

б) Найдите площадь этой сферы.

2. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что двугранный угол при основании пирамиды больше  $45^\circ$ .

б) Найдите площадь вписанной сферы.

3. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

4. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

а) Докажите, что существует сечение пирамиды, проходящее через её вершину и являющееся тупоугольным треугольником.

б) Найдите площадь вписанной сферы.

5. Плоскость  $\alpha$  пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость  $\beta$ , параллельная плоскости  $\alpha$ , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

а) Докажите, что площадь поверхности меньшего шара не меньше, чем 32.

б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью  $\alpha$ .

6. Плоскость  $\alpha$  пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость  $\beta$ , параллельная плоскости  $\alpha$ , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4.

а) Докажите, что площадь поверхности меньшего шара не меньше, чем 24.

б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью  $\alpha$ .

7. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда  $AB$ , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр  $CD$ , перпендикулярный  $AB$ . Построено сечение  $ABNM$ , проходящее через прямую  $AB$  перпендикулярно прямой  $CD$  так, что точка  $C$  и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр  $CD$ , лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды  $CABNM$ .

8. Длина диагонали куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 3. На луче  $A_1 C$  отмечена точка  $P$  так, что  $A_1 P = 4$ .

а) Докажите, что  $PBDC_1$  — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка  $AP$ .

9. Вокруг куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 3 описана сфера. На ребре  $CC_1$  взята точка  $M$  так, что плоскость, проходящая через точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ , образует угол  $15^\circ$  с плоскостью  $ABC$ .

а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ .

б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы

10. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция. Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом  $60^\circ$ .

а) Докажите, что существует точка (центр описанной сферы), одинаково удаленная от всех вершин пирамиды.

б) Найдите радиус данной сферы, если дополнительно известно, что основания трапеции равны 8 и 18, а её боковая сторона равна 13.

11. Две правильные четырёхугольные пирамиды  $EABCD$  и  $FABCD$  имеют общее основание  $ABCD$  и расположены по разные стороны от него. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно. Все ребра пирамид равны.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AE$  и  $BF$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $EM$  и  $FN$ .

12. Внутри цилиндра расположен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  так, что все его вершины лежат на поверхности цилиндра, причём вершины  $B$  и  $D_1$  совпадают с центрами оснований, а остальные вершины лежат на боковой поверхности цилиндра.

а) Докажите, что плоскость  $AB_1 C$  параллельна основаниям цилиндра.

б) Найдите объём цилиндра, если ребро куба равно 3.

13. Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как 4 : 7.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении 33 : 32, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 13.

14. Квадрат  $ABCD$  и прямой цилиндр расположены таким образом, что  $AB$  — диаметр верхнего основания цилиндра, а  $CD$  лежит в плоскости нижнего основания цилиндра и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом  $60^\circ$ .

б) Найдите длину находящейся снаружи цилиндра части отрезка  $BD$ , если образующая цилиндра равна  $\sqrt{15}$ .

15. В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 4 и стороной основания  $2\sqrt{3}$  вписан шар. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через её середину.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  и шар не имеют общих точек.

б) Найдите расстояние от центра шара до плоскости  $\alpha$ .

16. В пирамиде  $FABC$  грани  $ABF$  и  $ABC$  перпендикулярны,  $FB : FA = 27 : 8$ . Тангенс угла между прямой  $BC$  и плоскостью  $ABF$  равен 2, а точка  $M$  выбрана на ребре  $BC$  так, что  $BM : MC = 1 : 2$ . Точка  $T$  лежит на прямой  $AF$  и равноудалена от точек  $M$  и  $B$ . Центр сферы, описанной около пирамиды  $FABC$ , лежит на ребре  $AB$ , площадь поверхности этой сферы равна  $16\pi$ .

- а) Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $ABF$  — прямоугольные.
- б) Найдите объем пирамиды  $ACMT$ .

17. В правильной треугольной пирамиде  $DABC$  углы боковых граней при вершине пирамиды  $D$  — прямые. Внутри пирамиды находится куб, диагональ которого совпадает с высотой пирамиды.

- а) Докажите, что ребро куба в три раза меньше бокового ребра пирамиды.
- б) Найдите площадь поверхности пирамиды  $DABC$ , если площадь поверхности куба равна 96.

18. В правильную четырехугольную пирамиду  $PABCD$  вписан куб, одна грань которого лежит в плоскости основания  $ABCD$  пирамиды, а все вершины противоположной грани лежат на апофемах боковых граней пирамиды. Ребро куба в 2,5 раза меньше высоты пирамиды.

- а) Докажите, что вершины куба делят апофемы боковых граней пирамиды в отношении  $3 : 2$ , считая от вершины пирамиды.
- б) Найдите площадь поверхности пирамиды, если площадь поверхности куба равна 108.