

1. Окружность с центром  $O$ , расположенном внутри прямоугольной трапеции  $ABCD$ , проходит через вершины  $B$  и  $C$  большей боковой стороны этой трапеции и касается боковой стороны  $AD$  в точке  $T$ .

- Докажите, что угол  $BOC$  вдвое больше угла  $BTC$ .
- Найдите расстояние от точки  $T$  до прямой  $BC$ , если основания трапеции  $AB$  и  $CD$  равны 4 и 9 соответственно.

2. Дана равнобедренная трапеция  $KLMN$  с основаниями  $KN$  и  $LM$ . Окружность с центром  $O$ , построенная на боковой стороне  $KL$  как на диаметре, касается боковой стороны  $MN$  и второй раз пересекает большее основание  $KN$  в точке  $H$ , точка  $Q$  — середина  $MN$ .

- Докажите, что четырёхугольник  $NQOH$  — параллелограмм.
- Найдите  $KN$ , если  $\angle LKN = 75^\circ$  и  $LM = 1$ .

3. Сторона  $CD$  прямоугольника  $ABCD$  касается некоторой окружности в точке  $M$ . Продолжение стороны  $AD$  пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ , причём точка  $P$  лежит между точками  $D$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  касается окружности, а точка  $Q$  лежит на прямой  $BM$ .

- Докажите, что  $\angle DMP = \angle CBM$ .
- Известно, что  $CM = 17$  и  $CD = 32$ . Найдите сторону  $AD$ .

4. Стороны  $KN$  и  $LM$  трапеции  $KLMN$  параллельны, прямые  $LM$  и  $MN$  — касательные к окружности, описанной около треугольника  $KLN$ .

- Докажите, что треугольники  $LMN$  и  $KLN$  подобны.
- Найдите площадь треугольника  $KLN$ , если известно, что  $KN = 3$ , а  $\angle LMN = 120^\circ$ .

5. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

- Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
- Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

6. В прямоугольной трапеции  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания  $AD$ , вторая — боковых сторон, меньшего основания  $BC$  и первой окружности.

- Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание  $AD$  в точке  $P$ . Докажите, что  $\frac{AP}{PD} = \sin D$ .
- Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

7. Сторона  $CD$  прямоугольника  $ABCD$  касается некоторой окружности в точке  $M$ . Продолжение стороны  $AD$  пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ , причём точка  $P$  лежит между точками  $D$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  касается окружности, а точка  $Q$  лежит на прямой  $BM$ .

- Докажите, что  $\angle DMP = \angle CBM$ .
- Известно, что  $CM = 17$  и  $CD = 25$ . Найдите сторону  $AD$ .

8. Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $W$  делят стороны выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  в отношении  $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$ , радиус окружности, описанной около треугольника  $PQW$ , равен 10,  $PQ = 16$ ,  $QW = 12$ , угол  $PWQ$  — острый.

- Докажите, что треугольник  $PQW$  — прямоугольный.
- Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

9. В трапеции  $ABCD$  угол  $BAD$  прямой. Окружность, построенная на большем основании  $AD$  как на диаметре, пересекает меньшее основание  $BC$  в точке  $S$  и  $M$ .

- Докажите, что угол  $BAM$  равен углу  $CAD$ .
- Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $AOB$ , если  $AB = 6$ , а  $BC = 4BM$ .

10. Окружность с центром  $O_1$  касается оснований  $BC$  и  $AD$  и боковой стороны  $AB$  трапеции  $ABCD$ . Окружность с центром  $O_2$  касается сторон  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ . Известно, что  $AB = 10$ ,  $BC = 9$ ,  $CD = 30$ ,  $AD = 39$ .

- Докажите, что прямая  $O_1O_2$  параллельна основаниям трапеции  $ABCD$ .
- Найдите  $O_1O_2$ .

11. Окружность проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  и пересекает  $BC$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $K$  соответственно.

- Докажите, что отрезки  $AE$  и  $AK$  равны.
- Найдите  $AD$ , если  $CE = 48$ ,  $DK = 20$ ,  $\cos \angle BAD = 0,4$ .

12. Окружность с центром в точке  $O$  высекает на всех сторонах трапеции  $ABCD$  равные хорды.

- Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.
- Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону  $AB$  в точках  $K$  и  $L$  так, что  $AK = 11$ ,  $KL = 10$ ,  $LB = 4$ .

13. Окружность проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$ , пересекает сторону  $BC$  в точках  $B$  и  $E$  и пересекает сторону  $CD$  в точках  $K$  и  $D$ .

- Докажите, что  $AE = AK$ .
- Найдите  $AD$ , если  $CE = 10$ ,  $DK = 9$  и  $\cos \angle BAD = 0,2$ .

14. Окружность проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  параллелограмма и пересекает продолжение стороны  $AD$  в точке  $E$ , а продолжение стороны  $CD$  в точке  $K$ .

- Докажите, что отрезки  $BE$  и  $BK$  равны.
- Найдите отношение  $KE$  к  $AC$ , если  $\angle ABC = 135^\circ$ .

15. Дана трапеция  $KLMN$  с основаниями  $KN$  и  $LM$ . Около треугольника  $KLN$  описана окружность, прямые  $LM$  и  $MN$  — касательные к этой окружности.

- Докажите, что треугольники  $LMN$  и  $KLN$  подобны.
- Найдите площадь треугольника  $KLN$ , если известно, что  $KN = 3$ , а  $\angle LMN = 120^\circ$ .

16. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Окружность, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , пересекает отрезки  $BM$  и  $CN$  в точках  $P$  и  $Q$  (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки  $M, N, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

б) Найдите длину отрезка  $QN$ , если  $BC = 4,5$ ,  $AD = 21,5$ ,  $AB = 26$ ,  $CD = 25$ , а угол  $CPD$  — прямой.

17. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Окружность проходит через точки  $B$  и  $C$  и пересекает отрезки  $BM$  и  $CN$  в точках  $P$  и  $Q$ , отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки  $M, N, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

б) Найдите  $PM$ , если отрезки  $AQ$  и  $BQ$  перпендикулярны,  $AB = 15$ ,  $BC = 1$ ,  $CD = 17$ ,  $AD = 9$ .

18. Точка  $O$  — центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Прямая  $OB$  вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке  $P$ .

а) Докажите, что  $OP = AP$ .

б) Найдите расстояние от точки  $P$  до прямой  $AC$ , если  $\angle ABC = 120^\circ$ , а радиус описанной окружности равен 18.

19. В четырёхугольнике  $ABCD$  противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка  $O$ .

а) Докажите, что около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если  $AC = 10$ ,  $BD = 26$ .

20. В прямоугольнике  $ABCD$ , в котором  $AD = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , а  $AB = 6$ , расположены две окружности. Окружность с центром в точке  $K$ , радиус которой равен 2, касается сторон  $AB$  и  $AD$ . Окружность с центром в точке  $L$ , радиус которой равен 1, касается стороны  $CD$  и первой окружности.

а) Докажите, что точки  $A, K, L$  лежат на одной прямой.

б) Найдите площадь треугольника  $CLM$ , если  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $B$  на прямую, проходящую через точки  $K$  и  $L$ .

21. Сторона  $AB$  квадрата  $ABCD$  равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной  $CK$ , проведенной из вершины  $C$  к этой окружности, равна 2.

а) Докажите, что длина отрезка, соединяющего центр квадрата и центр окружности равна длине отрезка  $CK$ .

б) Найдите диаметр окружности.

22. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  угол  $BCD$  — тупой. Через точку  $B$  проведена прямая, параллельная прямой  $CD$  и пересекающая прямую  $AD$  в точке  $E$ . На продолжении  $BE$  за точку  $E$  отмечена точка  $F$  такая, что  $DE = DF$ .

а) Докажите, что точки  $A, F, C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $AF$ , если  $BD = 10$  и  $\cos \angle ADC = 0,6$ .

23. В четырёхугольнике  $ABCD$  противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка  $O$ .

а) Докажите, что около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник  $ABCD$ , если  $AC = 10$  и  $BD = 26$ .

24. В прямоугольнике  $ABCD$  на стороне  $AB$  как на диаметре построена окружность с центром  $O$ . Отрезок  $OD$  пересекает окружность в точке  $M$ . Известно, что  $\frac{DM}{AB} = \frac{\sqrt{26}-1}{2}$ .

а) Докажите, что стороны прямоугольника относятся как 5 : 2.

б) Найдите  $MC$ , если известно, что  $AM = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{26}}}$ .

25. В окружности с центром  $O$  построен квадрат  $KOFD$  так, что его вершина  $D$  лежит на окружности. Из точки  $B$ , диаметрально противоположной точке  $D$ , проведены две хорды  $AB$  и  $BC$ , проходящие через вершины  $K$  и  $F$  квадрата соответственно.

а) Докажите, что  $AK : KB = 1 : 5$ .

б) Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если радиус окружности равен 5.

26. Диагональ трапеции делит ее на два подобных прямоугольных треугольника, в каждый из которых вписана окружность.

а) Докажите, что произведение оснований трапеции равно квадрату этой диагонали.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, если основания трапеции равны 9 и 25.

27. Диагонали равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны. Окружность с диаметром  $AD$  пересекает боковую сторону  $CD$  в точке  $L$ , а окружность с диаметром  $AC$  пересекает основание  $AD$  в точке  $K$ . Отрезки  $AL$  и  $CK$  пересекаются в точке  $M$ .

а) Докажите, что точка  $M$  лежит на диагонали  $BD$  трапеции  $ABCD$ .

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до боковой стороны  $AB$ , если  $BC = 4$ ,  $AD = 28$ .

28. Два квадрата  $ABCD$  и  $AMNK$  с периметрами соответственно 20 и 24 располагают в круге так, что точки  $C, D, M, N$  лежат на окружности,  $A$  — общая,  $B$  и  $K$  внутри круга, угол  $BAK$  — острый.

а) Докажите, что угол  $BAK$  равен  $\frac{\pi}{4}$ .

б) Найдите площадь круга.

**29.** Окружность проходит через вершину  $C$  прямоугольника  $ABCD$  и касается его сторон  $AB$  и  $AD$  в точках  $K$  и  $P$  соответственно. К хорде  $KP$  проведен перпендикуляр  $CH$ .

- а) Докажите, что треугольники  $CBK$  и  $CHP$  подобны.
- б) Найдите площадь прямоугольника  $ABCD$ , если  $CH = 7$ .

**30.** В прямоугольной трапеции  $ABCD$  к большей боковой стороне  $BC$  построен перпендикуляр, пересекающий  $BC$  и  $AD$  в точках  $F$  и  $N$  соответственно. Окружность, описанная около треугольника  $ABN$  проходит через  $T$  — точку пересечения  $DF$  и  $NC$ , а окружность, описанная около треугольника  $DNC$  проходит через  $P$  — точку пересечения  $AT$  и  $BN$ . Угол  $NAT$  равен  $18^\circ$ .

- а) Докажите, что  $PF$  параллельна  $AB$ .
- б) Найдите  $PT$ , если  $AB = \sqrt{5} + 1$ .

**31.** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  ( $BC < AD$ ) окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$ , делят диагональ  $AC$  в отношении  $2 : 1 : 1$ , считая от точки  $A$ .

- а) Докажите, что одно из оснований трапеции равно боковой стороне.
- б) Найдите отношение, в котором диагональ  $AC$  делит площадь трапеции.

**32.** В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $K$  делит сторону  $AB$  в отношении  $AK : KB = 2 : 1$ ,  $DK$  пересекает  $AC$  в точке  $P$ . На стороне  $AD$  отмечена точка  $T$  так, что  $PT$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ACD$ , а около четырёхугольника  $PCDT$  можно описать окружность.

- а) Докажите, что  $AT : TD = 5 : 3$
- б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник  $PCDT$ , если  $AB = 3$ .