1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении 1 : 4, считая от вершины D.

а) Докажите, что сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1 — параллелограмм.

б) Найдите площадь этого сечения.

2. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

3. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$ и $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении 1 : 4, считая от вершины D.

а) Докажите, что любая плоскость, проходящая через вершины A_1 и C, делит параллелепипед на две равновеликие фигуры.

б) Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1.

5. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью A_1BE − это равнобокая трапеция.

б) Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 2.

6. Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью D_1AE есть равнобокая трапеция.

б) Найдите площадь этого сечения, если ребра куба равны 4.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке K.

а) Докажите, что $B_1K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

8. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ BD_1 проведена плоскость α, параллельная прямой AC.

а) Докажите, что прямая пересечения плоскости α с плоскостью основания $A_1B_1C_1D_1$ параллельна прямой A_1C_1.

б) Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB = 6$, $BC = 8$, $CC_1 = 10$.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Точка P — середина A_1D_1, точка Q делит отрезок AB_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины A, R — точка пересечения отрезков BC_1 и B_1C.

а) Найдите площадь сечения куба плоскостью PQR.

б) Найдите отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 куба.

11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P лежит на ребре AA_1, причём $A_1P : PA = 3 : 4$, $BB_1 = 14$, $AD = 6$. Плоскость DPB_1 пересекает ребро CC_1 в точке N, тангенс угла между прямой NP и плоскостью основания $ABCD$ равен $\frac{1}{5}$.

а) Докажите, что четырехугольник DPB_1N — ромб.

б) Найдите площадь сечения DPB_1N.

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая ребра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что сечение AFC_1E — параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая ребра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что сечение AFC_1E — параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E — ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, L и M — середины ребер AB, B_1C_1 и DD_1.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью KLM является правильным многоугольником.

б) Найдите расстояния от точки A до плоскости KLM, если ребро куба равно 2.

15. На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 6$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость FTD_1 делит ребро AA_1 в отношении 2 : 5.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTD_1.

16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = 5$, $BC = 3$ и $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро A_1B_1.

17. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 2$, точка T — середина ребра B_1C_1. Длины рёбер AD и $A A_1$ равны 6 и 10 соответственно.

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ETD_1, если $AB = 2\sqrt{10}$.

18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Точка P — середина A_1D_1, точка Q делит отрезок AB_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины A, R — точка пересечения отрезков BC_1 и B_1C.

а) Найдите площадь сечения куба плоскостью PQR.

б) Найдите отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 куба.

19. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 20\sqrt{3}$, $AD = 42$ и $AA_1 = 56$. На отрезках BC_1 и BD отмечены точки M и N соответственно так, что прямые AM и A_1N пересекаются и $BN : ND = 1 : 7$.

а) Докажите, что угол между прямой D_1M и плоскостью BCC_1 равен 30°.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью AMN.

20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 5. На его ребре AA_1 отмечена точка M так, что $AM = 3$. Через точки M и B_1 проведена плоскость α, параллельная AC_1.

а) Докажите, что $D_1N : NA_1 = 1 : 2$, если N — точка пересечения плоскости α с ребром A_1D_1.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

21. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через точки B_1 и D_1 проходят плоскости α и β, каждая из которых делит диагональ AC_1 на части, относящиеся друг к другу как 1 : 3. Также $AB = 4$, $BC = 3$ и высота параллелепипеда равна $\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

а) Докажите, что плоскости α и β перпендикулярны.

б) Найдите отношение объемов частей, на которые плоскости α и β делят параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

22. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 4$, $BC = 2$, $AA_1 = 2$. Точка M — середина B_1C_1, точка L делит ребро A_1B_1 в отношении 1 : 3, считая от вершины B_1. Плоскость LMC пересекает ребро AB в точке K.

а) Докажите, что K — середина AB.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью KLM.

23. В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с диагоналями $AC = 2$, $BD = \sqrt{2}$, пересекающимися в точке O. Ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 45°, а вершина A_1 ортогонально проецируется в точку O. Через точку A_1 перпендикулярно боковым ребрам проходит плоскость α.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α — квадрат.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит объем призмы.

24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB и D_1C_1 отмечены точки M и N, такие, что $D_1N : NC_1 = BM : MA = 1 : 3$, точка O — центр грани BCC_1B_1. Через точки A_1 и O проходит плоскость α параллельно прямой MN и составляет с плоскостями ABC, BB_1C и DCC_1 одинаковые углы.

а) Докажите, что стороны параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относятся как 3 : 4 : 5.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, если ребра параллелепипеда равны 3, 4, 5.

25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K — середины его ребер AB и BC соответственно. Плоскость α проходит через точку B параллельно прямым A_1M и B_1K.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку D.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью α, если его ребра равны 2.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AD = 2AA_1$, $AB = 3AA_1$. Плоскость α проходит через вершины A и C_1 и пересекает ребро CD в точке N такой, что $CN = 2ND$.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1B_1 в отношении 2 : 1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, если $AA_1 = 1$.

27. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

а) Докажите, что точка M — середина ребра A_1B_1.

б) Найдите высоту призмы, если ее объем равен 5 и известно, что точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $B_1K : KC_1 = 2 : 3$.