1. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

2. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB'. Через точки K и C' проведена плоскость α, параллельная прямой BD'.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины B_1.

а) Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и K.

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

4. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины D_1.

а) Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B, D и M.

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M.

5. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4.

а) Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1, и докажите, что это равнобокая трапеция.

б) Найдите площадь этого сечения.

7. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины D_1.

а) Докажите, что сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этой трапеции.

8. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины B_1.

а) Докажите, что сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K, есть равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь этого сечения.

9. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{6}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

10. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

12. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC. Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что $MD : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

13. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что $AB = BC$. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M лежит на ребре AC и делит его в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC.

б) Найдите расстояние между прямыми KM и A_1C_1, если $AB = 10$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

14. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K — середины BC, CC_1 и A_1C_1 сответственно.

а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения QMN.

15. В правильной восьмиугольной призме $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ сторона основания AB равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно 6. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Плоскость α параллельна прямой H_1E_1 и проходит через точки M и A.

а) Докажите, что сечение данной призмы плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F_1, а основанием — сечение данной призмы плоскостью α.

16. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре BB_1 отмечена точка Q такая, что $BQ : QB_1 = 2 : 7$. Плоскость α проходит через точки A и Q параллельно прямой BD. Эта плоскость пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что $C_1M : CC_1 = 5 : 9$.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 18$.

17. В правильной четырехугольной призме $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро — 15. На ребрах M_1Q_1, M_1N_1 и PQ взяты точки X, Y, Z соответственно так, что $Q_1X = N_1Y = QZ = 5$.

а) Пусть C — точка пересечения плоскости XYZ с ребром PN. Докажите, что $XYCZ$ — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью XYZ.

18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM : MD_1 = 3 : 2$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и E.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием сечение призмы $ABCDEFAB_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

19. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = BC = 6$ и $AA_1 = 12$, точки M и K — середины AB и BC соответственно. Точка N лежит на ребре BB_1, причем $BN = 6$. Через точку D провели плоскость α параллельно плоскости KMN.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точки A_1 и C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α.

20. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина ребра основания равна 4, а длина бокового ребра равна 2.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α, проходящей через середину ребра AB перпендикулярно отрезку, соединяющему середины рёбер BC и A_1B_1, делит ребро AC в отношении 1 : 3, считая от вершины A.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α.

21. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB. На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1. Точка M делит пополам ребро BC. Через точку M проведена плоскость α, перпендикулярная PQ.

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ, если $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$.

22. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра A_1C_1. Через середину M ребра BC провели плоскость α, перпендикулярную отрезку PQ.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1, считая от точки A_1, если известно, что $AB = AA_1$ и $AB : BC = 2 : 7$.

23. Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K — середина DD_1.

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.

24. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причем $B_1K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N — середина BC.

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12, а ее высота равна 2.

25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M является серединой ребра BB_1, а точка N — середина ребра A_1C_1. Плоскость α, параллельная прямым AM и B_1N, проходит через середину отрезка B_1M.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка B_1C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$плоскостью α, если все ребра этой призмы равны 4.

26. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 5. На его ребре AA_1 отмечена точка M так, что $A_1M = 3$. Через точки M и B_1 проведена плоскость α, параллельная AC_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении 1 : 4, считая от вершины D_1.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

27. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 9, боковое ребро равно 14. Точка K принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении 2 : 7, считая от вершины A_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и K, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

28. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1 и D, пересекает стороны AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно, а сечение призмы плоскостью α является ромбом.

а) Докажите, что точка M — середина ребра AA_1.

б) Найдите высоту призмы, если площадь основания равна 3, а площадь сечения равна 6.

29. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра D_1C_1, а на ребрах AA_1 и CC_1 отмечены точки Q и N так, что $AQ : A_1Q = 1 : 4$ и $CN : C_1N = 3 : 2$. Через точки M и N проведена плоскость α параллельно прямой CQ.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину B.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на серединах рёбер A_1C_1 и BC отмечены точки M и N соответственно.

а) Докажите, что плоскость AB_1M делит отрезок A_1N в отношении 2 : 3, считая от вершины A_1.

б) Найдите объем пирамиды $AMNB_1$, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 4.

31. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q середина ребра A_1C_1. Через середину M ребра BC провели плоскость α, перпендикулярную отрезку PQ.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1, считая от точки A_1, если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 7$.

32. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание сечение данной призмы плоскостью γ.

33. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 отмечены точки K, M и L соответственно так, что $AK : KA_1 = B_1M : MB = 2 : 1$, а плоскость KLM делит площадь боковой поверхности призмы пополам.

а) Докажите, что L — середина CC_1.

б) Найдите площадь треугольника KLM, если все ребра призмы равны 3.

34. В правильной треугольной призме сторона AB основания равна 2, точка M — середина ребра CC_1.

а) Докажите, что сечение A_1MB — равнобедренный треугольник.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения равна 6.

35. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 5MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно плоскости ABB_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, если все ребра призмы равны 12.

36. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α будет трапеция.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если боковое ребро призмы равно 13, а сторона основания равна 12.