

1. В основании правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка  $N$  — середина ребра  $A_1C_1$ .

- Постройте сечение призмы плоскостью  $BAN$ .
- Найдите периметр этого сечения.

2. Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCD A'B'C'D'$  является квадрат  $ABCD$  со стороной  $3\sqrt{2}$ , высота призмы равна  $2\sqrt{7}$ . Точка  $K$  — середина ребра  $BB'$ . Через точки  $K$  и  $C'$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD'$ .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью  $\alpha$ .

3. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  сторона основания равна 11, а боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $K$  принадлежит ребру  $B_1C_1$  и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины  $B_1$ .

- Докажите, что точки  $A$  и  $C$  равноудалены от плоскости, проходящей через точки  $B, D$  и  $K$ .
- Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $B, D$  и  $K$ .

4. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  сторона основания равна 20, а боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $M$  принадлежит ребру  $A_1D_1$  и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины  $D_1$ .

- Докажите, что точки  $A$  и  $C$  равноудалены от плоскости, проходящей через точки  $B, D$  и  $M$ .
- Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $B, D$  и  $M$ .

5. Дана правильная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , у которой сторона основания  $AB = 4$ , а боковое ребро  $AA_1 = 9$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AC$ , а на ребре  $AA_1$  взята точка  $T$  так, что  $AT = 5$ .

- Докажите, что плоскость  $BB_1M$  делит отрезок  $C_1T$  пополам.
- Плоскость  $BTC_1$  делит отрезок  $MB_1$  на две части. Найдите длину меньшей из них.

6. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4.

- Изобразите сечение, проходящее через вершины  $A, B$  и середину ребра  $A_1C_1$ , и докажите, что это равнобокая трапеция.
- Найдите площадь этого сечения.

7. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  сторона основания равна 20, а боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $M$  принадлежит ребру  $A_1D_1$  и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины  $D_1$ .

- Докажите, что сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $B, D$  и  $M$ , является равнобедренной трапецией.
- Найдите площадь этой трапеции.

8. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  сторона основания равна 11, а боковое ребро  $AA_1 = 7$ . Точка  $K$  принадлежит ребру  $B_1C_1$  и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины  $B_1$ .

- Докажите, что сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки  $B, D$  и  $K$ , есть равнобедренная трапеция.
- Найдите площадь этого сечения.

9. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1 = \sqrt{6}$ . На рёбрах  $AB, A_1D_1$  и  $C_1D_1$  отмечены точки  $M, N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1N = C_1K = 1$ .

- Пусть  $L$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  — квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

10. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  точка  $K$  делит боковое ребро  $AA_1$  в отношении  $AK : KA_1 = 1 : 2$ . Через точки  $B$  и  $K$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DM : MD_1 = 2 : 1$ .
- Найдите площадь сечения, если известно, что  $AB = 4, AA_1 = 6$ .

11. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $C_1D_1$  перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины  $C, A_1$  и  $F_1$ .

12. Дана правильная четырёхугольная призма  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ . На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $AK : KA_1 = 1 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $B$  и  $K$  параллельно прямой  $AC$ . Эта плоскость пересекает ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что  $MD : MD_1 = 2 : 1$ .
- Найдите площадь сечения, если  $AB = 4, AA_1 = 6$ .

13. Дана прямая треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Известно, что  $AB = BC$ . Точка  $K$  — середина ребра  $A_1B_1$ , а точка  $M$  лежит на ребре  $AC$  и делит его в отношении  $AM : MC = 1 : 3$ .

- Докажите, что прямая  $KM$  перпендикулярна прямой  $AC$ .
- Найдите расстояние между прямыми  $KM$  и  $A_1C_1$ , если  $AB = 10, AC = 8$  и  $AA_1 = 3$ .

14. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , в которой сторона основания  $AB = 8$ , боковое ребро  $AA_1 = 2\sqrt{2}$ . Точка  $Q$  — точка пересечения диагоналей грани  $ABB_1A_1$ , точки  $M, N$  и  $K$  — середины  $BC, CC_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

- Докажите, что точки  $Q, M, N$  и  $K$  лежат в одной плоскости.
- Найдите площадь сечения  $QMN$ .

15. В правильной восьмиугольной призме  $ABCDEFGH A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$  сторона основания  $AB$  равна  $3\sqrt{2}$ , а боковое ребро  $AA_1$  равно 6. На ребре  $CC_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $CM : MC_1 = 1 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $H_1 E_1$  и проходит через точки  $M$  и  $A$ .

- Докажите, что сечение данной призмы плоскостью  $\alpha$  — равнобедренная трапеция.
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка  $F_1$ , а основанием — сечение данной призмы плоскостью  $\alpha$ .

16. Дана правильная четырехугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . На ребре  $BB_1$  отмечена точка  $Q$  такая, что  $BQ : QB_1 = 2 : 7$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $A$  и  $Q$  параллельно прямой  $BD$ . Эта плоскость пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- Докажите, что  $C_1 M : CC_1 = 5 : 9$ .
- Найдите площадь сечения, если  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 18$ .

17. В правильной четырехугольной призме  $MNPQ M_1 N_1 P_1 Q_1$  сторона основания равна 11, а боковое ребро — 15. На ребрах  $M_1 Q_1$ ,  $M_1 N_1$  и  $PQ$  взяты точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно так, что  $Q_1 X = N_1 Y = QZ = 5$ .

- Пусть  $C$  — точка пересечения плоскости  $XYZ$  с ребром  $PN$ . Докажите, что  $XYZC$  — прямоугольник.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $XYZ$ .

18. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $5\sqrt{3}$ . На ребре  $DD_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $DM : MD_1 = 3 : 2$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $A_1 F_1$  и проходит через точки  $M$  и  $E$ .

- Докажите, что сечение призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  плоскостью  $\alpha$  — равнобедренная трапеция.
- Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка  $F$ , а основанием сечение призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  плоскостью  $\alpha$ .

19. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребрами  $AB = BC = 6$  и  $AA_1 = 12$ , точки  $M$  и  $K$  — середины  $AB$  и  $BC$  соответственно. Точка  $N$  лежит на ребре  $BB_1$ , причем  $BN = 6$ . Через точку  $D$  провели плоскость  $\alpha$  параллельно плоскости  $KMN$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $A_1$  и  $C_1$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ .

20. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  длина ребра основания равна 4, а длина бокового ребра равна 2.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$ , проходящей через середину ребра  $AB$  перпендикулярно отрезку, соединяющему середины ребер  $BC$  и  $A_1 B_1$ , делит ребро  $AC$  в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $A$ .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ .

21. Дана правильная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ .  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $AB$ . На  $AB$  отмечена точка  $P$  такая, что  $AP : PB = 3 : 1$ . Точка  $Q$  делит пополам ребро  $B_1 C_1$ . Точка  $M$  делит пополам ребро  $BC$ . Через точку  $M$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная  $PQ$ .

- Докажите, что прямая  $AB$  параллельна плоскости  $\alpha$ .
- Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит отрезок  $PQ$ , если  $AA_1 = 5$ ,  $AB = 12$  и  $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ .

22. В основании прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ . Точка  $P$  делит ребро  $AB$  в отношении  $AP : PB = 1 : 3$ , а точка  $Q$  — середина ребра  $A_1 C_1$ . Через середину  $M$  ребра  $BC$  провели плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную отрезку  $PQ$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AC$  пополам.
- Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит отрезок  $A_1 C_1$ , считая от точки  $A_1$ , если известно, что  $AB = AA_1$  и  $AB : BC = 2 : 7$ .

23. Дана правильная призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями  $AD = 5$  и  $BC = 4$ . Точка  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении  $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$ , точка  $K$  — середина  $DD_1$ .

- Докажите, что плоскость  $MCK$  делит отрезок  $BB_1$  пополам.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MKC$ , если  $\angle ADC = 60^\circ$ , а  $\angle MKC = 90^\circ$ .

24. Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является параллелограмм. На ребрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно, причем  $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$ , а  $AMKN$  — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

- Докажите, что  $N$  — середина  $BC$ .
- Найдите площадь трапеции  $AMKN$ , если объем призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 12, а ее высота равна 2.

25. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  точка  $M$  является серединой ребра  $BB_1$ , а точка  $N$  — середина ребра  $A_1 C_1$ . Плоскость  $\alpha$ , параллельная прямым  $AM$  и  $B_1 N$ , проходит через середину отрезка  $B_1 M$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину отрезка  $B_1 C_1$ .
- Найдите площадь сечения призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  плоскостью  $\alpha$ , если все ребра этой призмы равны 4.

26. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 5. На его ребре  $AA_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $A_1 M = 3$ . Через точки  $M$  и  $B_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная  $AC_1$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $1 : 4$ , считая от вершины  $D_1$ .
- Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью  $\alpha$ .

27. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания равна 9, боковое ребро равно 14. Точка  $K$  принадлежит ребру  $A_1 B_1$  и делит его в отношении  $2 : 7$ , считая от вершины  $A_1$ .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $C$  и  $K$ , является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

28. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $B_1$  и  $D$ , пересекает стороны  $AA_1$  и  $CC_1$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно, а сечение призмы плоскостью  $\alpha$  является ромбом.

а) Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

б) Найдите высоту призмы, если площадь основания равна 3, а площадь сечения равна 6.

29. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $M$  — середина ребра  $D_1 C_1$ , а на ребрах  $AA_1$  и  $CC_1$  отмечены точки  $Q$  и  $N$  так, что  $AQ : A_1 Q = 1 : 4$  и  $CN : C_1 N = 3 : 2$ . Через точки  $M$  и  $N$  проведена плоскость  $\alpha$  параллельно прямой  $CQ$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $B$ .

б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

30. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  на серединах ребер  $A_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $AB_1 M$  делит отрезок  $A_1 N$  в отношении  $2 : 3$ , считая от вершины  $A_1$ .

б) Найдите объем пирамиды  $AMNB_1$ , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 4.

31. В основании прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ . Точка  $P$  делит ребро  $AB$  в отношении  $AP : PB = 1 : 3$ , а точка  $Q$  — середина ребра  $A_1 C_1$ . Через середину  $M$  ребра  $BC$  провели плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную отрезку  $PQ$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AC$  пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит отрезок  $A_1 C_1$ , считая от точки  $A_1$ , если известно, что  $AB = AA_1$ ,  $AB : BC = 2 : 7$ .

32. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона  $AB$  основания равна 5, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{5}$ . На ребрах  $BC$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $BK = C_1 L = 2$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $BD$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

а) Докажите, что прямая  $A_1 C$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

б) Найдите объем пирамиды, вершина которой — точка  $A_1$ , а основание сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

33. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  на боковых ребрах  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  отмечены точки  $K$ ,  $M$  и  $L$  соответственно так, что  $AK : KA_1 = B_1 M : MB = 2 : 1$ , а плоскость  $KLM$  делит площадь боковой поверхности призмы пополам.

а) Докажите, что  $L$  — середина  $CC_1$ .

б) Найдите площадь треугольника  $KLM$ , если все ребра призмы равны 3.

34. В правильной треугольной призме сторона  $AB$  основания равна 2, точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Докажите, что сечение  $A_1 MB$  — равнобедренный треугольник.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения равна 6.

35. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  отметили точки  $M$  и  $K$  на ребрах  $AA_1$  и  $A_1 B_1$  соответственно. Известно, что  $AM = 5MA_1$ ,  $A_1 K = KB_1$ . Через точки  $M$  и  $K$  провели плоскость  $\alpha$  перпендикулярно плоскости  $ABB_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $C_1$ .

б) Найдите площадь сечения призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  плоскостью  $\alpha$ , если все ребра призмы равны 12.