

1. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

- а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
- б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

2. Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причём все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b .

3. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

4. Дана последовательность из нескольких натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
- б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

5. Перед каждым из чисел 14, 15, ..., 20 и 4, 5, ..., 8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

6. Каждое из чисел 5, 6, ..., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

7. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

- а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?
- б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

8. В ряд выписаны числа: $1^2, 2^2, \dots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «-» и находят получившуюся сумму.

Может ли такая сумма равняться:

- а) 12, если $N = 12$?
- б) 0, если $N = 50$?
- в) 0, если $N = 80$?
- г) 5, если $N = 90$?

9. Найдите все целые значения m и k такие, что $3^m + 3^{2m} + 3^{3m} + \dots + 3^{km} = 2010$.

10. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
- б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

11. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отлично от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

- а) Может ли в такой прогрессии быть десять членов?
- б) Докажите, что число её членов меньше 100.
- в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
- г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами

12. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

- а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
- б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

13. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида $\frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?