1. Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\frac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения x.

2. Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

3. Найдите все тройки натуральных чисел *k, m* и *n*, удовлетворяющие уравнению $2\cdot k! = m! - 2\cdot n!$. Как обычно, $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)$.

4. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

5. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

6. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2 < 18x-20y-166, \\ 32x-y^2 > x^2+12y+271. \end{cases}$$

7. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167 < 0, \\ x+2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

8. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

9. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1} - n! = 5(30k+11)$.
Примечание.
Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

10. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1} - n! = 7(420k+1)$.
Примечание.
Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

11. Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях?

12. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

13. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$, где $m > n$.

14. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

15. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа p. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

16. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

17. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\frac{a^4+16a^2+7}{a^3+15a}$ можно сократить на b.

18. Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

19. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

20. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.

21. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

22. Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 399 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

23. Ученик должен перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в 3 раза больше истинного. Найдите все три числа.

24. Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что $\frac{p}{q}=\frac{1234567\overbrace{888...8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999...9}_{1999}87654321}$.

25. Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.
а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?
б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

26. По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.
а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.
б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

27. Решите в целых числах уравнение $3^n+8=x^2$.

28. В ряду чисел 3 * 4 * 5 * 6 * 12 * 13 * 14 * 15 на месте каждой звездочки поставили знак сложения или вычитания (по своему усмотрению) и подсчитали результат.
а) Могло ли в результате вычисления получиться число 9?
б) Какое наименьшее натуральное число могло получиться в результате вычисления?
в) В ряду чисел 3 * 4 * 5 * 6 * 12 * 13 * 14 * 15 на месте каждой звездочки поставили знак умножения или деления (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое наименьшее натуральное число могло получиться в результате вычисления?

29. а) Существует ли натуральное число n, делящееся нацело на 12 и при этом имеющее ровно 12 различных делителей (включая единицу и само число n)?
б) Найдите все натуральные числа, делящиеся нацело на 14 и имеющие ровно 14 различных натуральных делителей.
в) Существует ли натуральное число, делящееся нацело на 2014 и имеющее ровно 2014 различных натуральных делителей?

30. Целые числа от 2 до 11 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:
а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?
б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания?
в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

31. а) Можно ли в выражении $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}*\frac{1}{7}*\frac{1}{8}$ вместо всех знаков * так расставить знаки «+» и «−», чтобы модуль этого выражения стал меньше $\frac{1}{8}$?
б) Можно ли в выражении $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}*\frac{1}{7}*\frac{1}{8}$ вместо всех знаков * так расставить знаки «+» и «−», чтобы модуль этого выражения стал меньше $\frac{1}{500}$?
в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}*\frac{1}{6}*\frac{1}{7}*\frac{1}{8}\right|$, если разными способами заменять каждый из знаков * заменять знаками «+» и «−»?

32. При изучении темы «Среднее арифметическое» в классе из 34 учащихся раздали синие и красные карточки, при этом каждый из учеников получил хотя бы одну карточку, но не более одной каждого цвета. На каждой карточке написано одно целое число от 0 до 20 (на различных карточках могут быть записаны одинаковые числа). Среднее арифметическое по всем розданным карточкам оказалось равным 15 по каждому цвету в отдельности. Затем каждый ученик назвал наибольшее из чисел на своих карточках (если ему досталась одна карточка, то он назвал число, написанное на этой карточке). Среднее арифметическое всех названных чисел оказалось равно S.
а) Приведите пример, когда $S<15$.
б) Могло ли S быть равным 9?
в) Найдите наименьшее значение S, если по две карточки получили 17 учеников.

33. Из 26 последовательных нечетных чисел 1, 3, 5, ... , 51 выбрали 11 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A — шестое по величине среди этих чисел, а B — среднее арифметическое выбранных одиннадцати чисел.
а) Может ли $B-A$ равняться $\frac{3}{11}$?
б) Может ли $B-A$ равняться $\frac{4}{11}$?
в) Найдите наибольшее возможное значение $B-A$.

34. Учащиеся 11 классов сдавали тесты по различным предметам. Каждый тест оценивается от 0 до 100 баллов. После получения результатов пятеро друзей решили сравнить полученные баллы. Каждый сдавал русский язык и профильную математику, четверо сдавали физику, трое сдавали информатику, двое сдавали обществознание. Общая сумма баллов по физике не больше 300, а по информатике — не меньше 220. Сумма баллов по обществознанию оказалась равна сумме двух лучших результатов по физике и информатике.

а) Мог ли один из друзей не сдать хотя бы один экзамен?

б) Могли ли двое не сдать какой-то экзамен, если два участника написали обществознание на 78 и 87 баллов?

в) Какое наибольшее количество участников могли не сдать хотя бы один экзамен, если лучшая работа по физике оценена не более чем в 80 баллов, по информатике — не более 75 баллов, по обществознанию — не менее 90 баллов?

Указание. Тест считается несданным, если за него получено 0 баллов.

35. а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+24)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте a свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100.

36. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое двузначное число n, для которого выполняется условие $S(n)=S(2n)$?

б) Существует ли такое двузначное число n, все цифры которого четны, для которого выполняется условие $S(n)=S(2n)$?

в) Найдите количество трехзначных чисел n, все цифры которых нечетны, для которых выполняется условие $S(n)=S(2n)$.

37. На доске написаны числа 3 и 5. За один ход разрешено заменить написанную на доске пару чисел a и b парой $2a-1$ и $a+b+1$ (например, из пары чисел 3 и 5 за один ход можно получить либо числа 5 и 9, либо числа 9 и 9).

а) Может ли получиться так, что после нескольких ходов на доске будут написаны числа 73 и 75?

б) Может ли получиться так, что после нескольких ходов одно из написанных на доске чисел будет равно 35?

в) После 2017 ходов на доске получили пару чисел, не равных друг другу. Какое наименьшее значение может иметь разность между большим и меньшим из этих чисел?

38. Дано натуральное четырехзначное число n, в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n, а в знаменателе — произведение всех цифр числа n.

а) Приведите пример такого числа n, для которого $f(n)=\dfrac{643}{160}$.

б) Существует ли такое n, что $f(n)=\dfrac{343}{160}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 160?

39. Имеется несколько камней, массы которых — различные натуральные числа.

а) Можно ли разложить 10 камней с массами 1, 2, 3, ..., 10 по шести кучкам так, чтобы вес каждой кучки не превосходил 10?

б) Можно ли разложить камни массами 370, 372, 374, ..., 468 на семь кучек так, чтобы вес каждой кучки не превосходил 3000?

в) Дополнительно известно, что общая сумма масс камней равна 4000, а масса каждой кучки, как и каждого камня, не превосходит 100. Какое минимальное количество таких кучек придется задействовать, чтобы гарантированно распределить данные камни?

40. На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 300?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 17?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 17, может быть на доске?

41. Известно, что уравнение $x^3-3x^2+bx+12=0$ имеет три различных целых корня.

а) Могут ли все корни этого уравнения быть четными?

б) Найдите количество отрицательных корней.

в) Найдите все возможные значения коэффициента b.

42. На полке расставлен 12-томник Марка Твена. Можно ли тома расставить так, чтобы:

а) Сумма номеров любых двух подряд стоящих томов делилось бы на 3?

б) Сумма номеров любых трех подряд стоящих томов делилось бы на 3?

в) Сумма номеров любых четырех подряд стоящих томов делилась бы на 3?

43. Сева каждый день заполняет таблицу 3 на 3 клетки числами 0, 2 или 4. При этом он рассчитывает день ото дня решать все более и более амбициозные задачи:

− Пн: добиться того, чтобы суммы чисел по строкам были различны;

− Вт: суммы чисел по строкам и хотя бы в одном из столбцов были различны;

− Ср: суммы чисел по строкам и хотя бы в двух столбцах были различны;

− Чт: суммы чисел по строкам и столбцам были различны;

− Пт: суммы чисел по строкам, столбцам и одной из главных диагоналей были различны;

− Сб: суммы чисел по строкам, столбцам и обеим главным диагоналям были различны.

а) Сможет ли Сева выполнить свой план на вторник, если хорошо постарается?

б) Сможет ли Сева выполнить свой план на субботу, если постарается пуще прежнего?

в) В какие дни Сева точно не сможет выполнить свой план?

44. В 16-битном регистре процессора 80286 каждый из 16 битов может принимать значения 0 и 1. Таким образом, число, записанное в регистр, представляет собой последовательность из 16 нулей и единиц.

а) Можно ли записать в регистр 30 различных чисел так, чтобы между любыми двумя единицами в записи числа было не менее 7 нулей?

б) Можно ли записать 30 чисел с тем же условием, что и в пункте а), если 5 младших битов регистра (то есть последних цифр в последовательности) неисправны и всегда равны нулю?

в) Сколько различных чисел с не менее чем 7 нулями между любыми двумя единицами можно записать в 16-битный регистр (со всеми 16 битами)?

45. Сева экспериментирует с таблицей 3 на 3 клетки. Его задача — разместить в ней монеты таким образом, чтобы во всех строках и столбцах таблицы количество монет было различным. Некоторые клетки могут остаться пустыми.

а) Есть ли шанс у Севы расположить в таблице 18 монет указанным способом?

б) А 6 монет указанным способом?

в) Какое наименьшее количество монет потребуется Севе для выполнения поставленной задачи?

46. В магазине продаются товары, каждый из которых стоит целое число рублей. Средняя цена товаров составляет 500 рублей. Однажды цены всех товаров уменьшили на 10%, а потом округлили до наибольшего целого числа рублей, не превосходящего уменьшенную цену.

а) Могла ли после этого средняя цена товара стать равной 450 рублей?

б) Могла ли после этого средняя цена товара стать равной 449,5 рублей?

в) Известно, что средняя цена товара стала равной 449,1 рублей. После этого цены ещё раз уменьшили на 10%, а потом округлили до наибольшего целого числа рублей, не превосходящего уменьшенную цену, и средняя цена товара стала равной 403,29 рублей. Какое наименьшее значение могла принимать цена одного товара изначально?

47. а) Существует ли пара натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 5, а наименьшее общее кратное — 123?

б) Существует ли пара натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 7, а наименьшее общее кратное — 294?

в) Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 13, а наименьшее общее кратное — 78.

48. Саша придумала уравнение $n^3 + 13n = k^3 + 273$.

а) Может ли данное уравнение иметь натуральные решения при $k = 21$?

б) Может ли данное уравнение иметь натуральные решения при $n \geq 2020$?

в) Найдите все пары $(n; k)$ натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению.

49. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел в A равно q и никакие два числа в множестве A не являются взаимно простыми. Найдите все числа множества A, если:

а) $q = 210$, произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа.

б) $q = 390$, произведение всех чисел из A не делится на 160 и не является четвертой степенью никакого целого числа.

в) $q = 330$, произведение всех чисел из A не является четвертой степенью никакого целого числа, а сумма всех чисел из A равна 755.

50. Известно, что n и m — натуральные числа.

а) Существует ли пара чисел n и m, для которых выполняется равенство $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{72}$?

б) Существует ли пара чисел n и m, для которых выполняется равенство $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{72}$?

в) Найдите все пары чисел n и m, для которых выполняется равенство $\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{72}$.

51. а) Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{14}{25}$ и $\frac{21}{40}$ получаются натуральные числа.

б) Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{35}{66}$, $\frac{28}{165}$ и $\frac{25}{231}$ получаются натуральные числа.

в) Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{154}{195}$, $\frac{385}{156}$ и $\frac{231}{130}$ получаются натуральные числа.

52. Про натуральное число n известно, что оно делится на 17, а число, полученное из n вычеркиванием последней цифры, делится на 13.

а) Приведите пример такого n.

б) Сколько существует трехзначных чисел n?

в) Найдите наибольшее шестизначное число n.

53. Написаны три различных натуральных числа. Затем написаны три различных попарных произведения этих чисел и произведение всех трех исходных чисел. Сумма полученных семи чисел оказалась равной 1514.

а) Может ли хотя бы одно из исходных чисел быть нечетным?

б) Может ли одно из исходных чисел быть больше чем число 200?

в) Найдите три исходных числа.

54. Два натуральных числа a и b таковы, что если к десятичной записи числа приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения a и b на 32.

а) Приведите пример таких чисел a и b

б) Может ли число b быть двухзначным?

в) Найдите все числа a и b, удовлетворяющие условию задачи.

55. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размера $m \times n$ клеток и проведена его диагональ. Все вершины прямоугольника лежат в узлах сетки и стороны прямоугольника не пересекают клетки.

а) Через сколько узлов сетки пройдет диагональ, если $m = 100,\ n = 64$.

б) На сколько частей эта диагональ делится линиям сетки, если $m = 195,\ n = 221$.

в) Найдите m и n, если известно, что числа m и n взаимно простые, $m < n$ и диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 2020 клеток этого прямоугольника.

56. В течение дня посетители приходили к кассиру, желая произвести различные платежи (сумма любого платежа — четное число рублей). Каждый протягивал купюру номиналом 5000 рублей. Кассир выдавал сдачу, имея только 300 монет по 10 рублей и 500 монет по 2 рубля. По итогам дня все монеты оказались потраченными на сдачу.

а) Могло ли за день быть 250 посетителей, если они получили равную сдачу?

б) Каким могло быть наибольшее число посетителей, если каждый получил одинаковую сдачу?

в) Для какого наибольшего количества посетителей кассир мог выдать на сдачу монеты указанным способом при любом распределении сдач, не противоречащим условию?

57. За круглым столом сидели 110 человек, а на столе лежали абрикосы. Для каждой пары соседей число съеденных ими абрикосов отличается на 3.

а) Могли ли быть съедены все абрикосы, если изначально их было 1000?

б) Какое наименьшее число абрикосов могло остаться, если изначально их было 1000?

в) Пусть один из присутствующих съел a абрикосов, а другой b. Найдите наибольшее возможное значение $a - b$ при условии, что изначально было 10 000 абрикосов.

58. В ячейках таблицы 5 на 9 расставлены натуральные числа, среди которых ровно 33 нечетных. Александра рассматривает пары соседних ячеек, имеющих общую сторону. Если произведение чисел в паре четно, наша героиня считает такую пару зачетной.

А) Может ли в таблице быть ровно 22 зачетные пары?

Б) Может ли в таблице быть ровно 49 зачетных пар?

В) Какое наибольшее число зачетных пар может быть в таблице?

59. Имеются два многочлена от целочисленной переменной x:

$$p(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k}$$
$$q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ от целочисленной переменной x, определенную для тех значений x, для которых $q(x) \neq 0$.

а) Может ли функция $f(x)$ принимать не целые значения при $k = 3$?

б) Может ли функция $f(x)$ принимать не целые значения при $k = 2$?

в) При каких натуральных значениях k функция $f(x)$ может принимать только целые значения?

60. В рамках проекта ежегодной аттестации учителей начальных классов, в котором приняли участие два города A и B, 51 учитель написал тест. Известно, что из каждого города тест написали хотя бы два учителя, причем каждый набрал целое положительное количество баллов, а после предварительных подсчетов средний балл в каждом городе оказался целым числом. Затем один из учителей, писавших тест, переехал из города A в город B, и средние баллы по городам пришлось пересчитать.

а) Мог ли средний балл в городе A после пересчета вырасти в два раза?

б) Известно, что после пересчета средние баллы в городах выросли на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в городе B равняться 1?

в) Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в городе B, если известно, что после пересчета средние баллы в городах выросли на 10%.

61. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2014 без пропусков и повторений: 1, 2, 3, …, 2013, 2014. С выписанными на доске числами проделывают следующие операции: выбирают какие-либо два числа и записывают на доске модуль их разности, увеличенный на 1, а сами выбранные числа стирают. Так продолжают до тех пор, пока на доске не останется только одно число.

а) Какое наименьшее число может остаться на доске?

б) Какое наибольшее число может остаться на доске?

62. Набор состоит из сорока пяти целых положительных чисел, среди которых есть числа 6, 7, 8. Среднее арифметическое любых тридцати пяти чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 26 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 26 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 50.

63. Натуральное число, являющееся полным квадратом, обладает следующим свойством: если все его цифры уменьшить на одно и то же натуральное число, то получится число, также являющееся полным квадратом.

а) Приведите пример двухзначного числа, обладающего указанным свойством.

б) Найдите все двухзначные числа, обладающие указанным свойством.

в) Найдите все четырехзначные числа, обладающие указанным свойством.

64. Натуральное число A таково, что если его первую цифру переставить на последнее место, получится число, в $n > 1$ раз меньше числа A.

а) Существует ли двухзначное число A, удовлетворяющее указанным условиям?

б) Найдите наименьшее число A, удовлетворяющее указанным условиям, если $n = 5$, а число A начинается с цифры 7.

в) Приведите пример числа, которое при перестановке его первой цифры на последнее место увеличивается в 3 раза.

65. Имеется прямоугольная таблица размером $M \times N$, заполненная числами 0 и 1, обладающая следующими свойствами. Во-первых, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один элемент, равный 1. Во-вторых, нет ни одной пары одинаковых строк, а также ни одной пары одинаковых столбцов. Таблицы, обладающие этими свойствами, назовем «хорошими».

Две таблицы назовем эквивалентными в том и только в том случае, если из одной из них можно получить другую путем перестановки строк и/или столбцов. Приведем пример двух эквивалентных таблиц размером 3 × 3.

1	1	1
1	1	0
0	1	0

1	0	1
0	0	1
1	1	1

Вторая таблица получается из первой сначала перестановкой в ней 1-й и 3-й строк, потом 2-го и 3-го столбца в полученной таблице, а затем 1-й и 2-й строки в последней полученной таблице.

а) Сколько существует различных попарно неэквивалентных «хороших» таблиц размером 2 × 3?

б) Укажите количество всех таблиц, эквивалентных «хорошей» таблице

1	1	0
1	0	1
0	1	1

в) Какое максимальное число столбцов может быть в «хорошей» таблице, содержащей M строк?

66. Склад, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ размером $k \times n \times p$ кубических метров $(p,\ n,\ k \in \mathbb{N})$, плотно заставлен канистрами размером 1 × 1 × 1 м^3. Пуля летит по прямой и повреждает канистру только если делает в ней две дырки. Возможно ли одним выстрелом повредить более чем $(p+n+k-3)$ канистр, если

а) $p = 5, n = 3, k = 2$ и выстрел произведен по диагонали AC_1?

б) $p = 26, n = 13, k = 5$ и выстрел произведен по диагонали AC_1?

в) Сколько канистр повредит пуля, пролетающая по диагонали AC_1, если $p = 1812$, $n = 1914, k = 1941$?

67. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

68. На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 1 и 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 173?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 109?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1021?

69. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трех значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трех средних арифметических

70. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?